ELEMENTI

DI

ARITMETICA

AD USO

DEL GINNASIO SUPERIORE

DELLE SCUOLE NORMALI E DEGL'ISTITUTI TECNICI

PER

AURELIANO FAIFOFER

PROFESSORE NEL LICEO MARCO FOSCARINI

DECIMAQUINTA EDIZIONE

VENEZIA

TIPOGRAFIA EMILIANA

1897

ELEMENTI D'ARITMETICA

CAPITOLO I
NUMERAZIONE

Preliminari.

1. Oggetti i più disparati possono avere una qualità comune (*); considerati insieme, rispetto a codesta qualità, costituiscono una *collezione d' oggetti.*

Qualunque collezione d' oggetti ha una proprietà a formare la quale ciascun oggetto concorre unicamente con la sua presenza nella collezione. Allude a questa proprietà chi domanda *quanti* sono gli oggetti di una collezione.

Il concetto rappresentato dalla parola *quanti* è il concetto *fondamentale* della scienza che ci proponiamo di trattare; appunto perciò esso non si può definire; non possiamo cioè determinarlo in base a sue relazioni con altri concetti noti. Noi qui seguitiamo supponendo che, quando torna in campo la parola *quanti*, si capisca di che si tratta.

2. Imaginiamo ora di aver *due* (**) collezioni di oggetti e di *far corrispondere* (di *riferire*, di *accoppiare*) a ciascun oggetto dell'una un oggetto dell'altra. Se le due collezioni rimangono esaurite ad un tempo, allora gli oggetti d' una collezione sono *tanti*, *quanti* sono gli oggetti dell'altra.

(*) Ad es., un cane, un pesce, una farfalla hanno in comune la qualità di essere *animali*.

(**) Questa parola è qui adoperata prima del tempo; ma, vietandoci qualsiasi anticipazione, ci condanneremmo al silenzio.

Mediante una collezione d'oggetti si può dunque indicare quanti sono gli oggetti d'un altra. Così è, ad es., che, mostrando alcune dita, taluno può far capire quante monete abbia in tasca.

3. Questo artifizio di determinare quanti sono gli oggetti d'una collezione, riferendoli a quelli di un'altra, è di uso frequentissimo in pratica.

La collezione, a cui quasi esclusivamente si riferisce ogni altra allo scopo predetto, è composta di certe parole, tutte differenti tra loro, che si succedono in un ordine determinato, invariabile, e senza fine. Codeste parole, dette *numeri*, sono le seguenti: *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*, *dieci*, . . . , *centotrè*, . . . , *trecento*, . . . , *ecc.*, *ecc.*

4. I numeri, quando si fanno corrispondere agli oggetti d'una collezione, si pronunciano uno dopo l'altro nell'ordine in cui si succedono, cominciando dal primo. Codesta operazione si dice *contare*.

Ad es., *contando* le dita d'una mano, si arriva al numero *cinque*; epperò si può dire che le dita d'una mano sono tante quanti sono i numeri *uno, due*, *tre*, *quattro, cinque.*

5. È manifesto che per indicare tutti i numeri, che si sono adoperati contando gli oggetti d'una collezione data qualunque, basta nominare l'ultimo numero del quale si è fatto uso. Così con una sola parola si determina, si esprime *quanti* sono gli oggetti di quella collezione. Ora possiamo dire che:

6. Definizione. *Numero è una parola mediante la quale si esprime quanti sono gli oggetti d'una collezione data.* (*).

(*) Così, dopo molto fare e rifare, crediamo di aver trovata (già nelle prime edizioni) la forma definitiva della pri-

Il numero, che esprime quanti sono gli oggetti d'una collezione, si dice brevemente: *il numero di quegli oggetti.*

7. La scienza dei numeri si chiama *Aritmetica.* Ne accenneremo l'importanza con le seguenti parole di Melantone " *mihi si linguae sint centum, oraque centum, non possem enumerare quam multis in rebus usus sit numerorum* „.

Composizione dei numeri.

8. Il numero degli oggetti d'una collezione può variar senza fine, perchè insieme con gli oggetti d'una collezione, a far parte di essa, se ne possono mettere (almeno idealmente) sempre di nuovi. Perciò è mestieri che anche la serie dei numeri prosegua senza fine.

I primi numeri, dall'*uno* al *dieci*, sono parole tutte radicalmente diverse tra loro. Tutti gli altri numeri, malgrado che la loro serie sia infinita, e che tutti debbano differire tra loro, sono composti secondo una legge semplicissima coi primi *dieci* e con pochissime altre parole introdotte senza assoluta necessità; alcune, senza utile alcuno, dall'uso; talune altre affine di ottenere concisione nel linguaggio.

9. La legge di composizione dei numeri vien trovata, si può dire senza che occorra cercarla, da chiunque non sappia contare oltre il *dieci*, e pur voglia esprimere quanti sono gli oggetti di una collezione, che ne contenga *più* (*) di *dieci*. Infatti si pre-

ma pagina dell'Aritmetica. (Abbiamo posto questa nota perchè ci sono autori che trovano da ridire d'un libro dopo d'averlo saccheggiato).

(*) Una collezione contiene *più* oggetti d'un'altra, se, acsenta spontanea l'idèa, dopo di aver contato dieci oggetti, di metterli da banda uniti insieme in un gruppo, e di contar poi da capo sino a dieci, e sempre da capo sino a dieci, finchè ci siano oggetti abbastanza; e ciò con l'intendimento di contar in fine i gruppi da dieci, e poi separatamente gli oggetti, se ne sono rimasti, che non fossero bastati a comporre un ultimo gruppo.

Posto, ad es., che, operando in tal modo, si siano ottenuti *tre gruppi da dieci* e che siano rimasti *sette* oggetti, è manifesto che, accennando questo risultato, si esprime con esattezza quanti sono gli oggetti della collezione data. *Tre decine e sette* sarebbe, in tal caso, il numero degli oggetti.

Abbiamo veduto come con le sole parole dall'*uno* al *dieci* si possa esprimere quanti sono gli oggetti d'una collezione anche quando essa ne contenga assai più di dieci. E perchè si è potuto ottener ciò aggruppando prima gli oggetti a dieci a dieci, e contando poi separatamente i gruppi da dieci e gli oggetti rimasti, nel caso che le decine siano più di dieci, per esprimere quante esse sono, è ben naturale di ricorrere allo stesso artificio, di comporre cioè gruppi maggiori, ciascuno con dieci decine. E così via.

10. Ai gruppi od *unità* di vari *ordini*, che si compongono per ottenere il numero degli oggetti d'una collezione data, furono attribuiti i nomi registrati nella tabella seguente:

Primo ordine . . . . *unità*
Secondo ordine . . . . . . *decine*

coppiando a ciascun suo oggetto un oggetto della seconda, questa rimane esaurita mentre ci sono ancora oggetti della prima collezione.

Terzo ordine . . . . *centinaia*
Quarto ordine . . . . *migliaia*
Quinto ordine . . . . *decine di migliaia*
Sesto ordine . . . . *centinaia di migliaia*
Settimo ordine . . . . *milioni*
Ottavo ordine . . . . *decine di milioni*
Nono ordine . . . . *centinaia di milioni*
Decimo ordine . . . . *bilioni* (*)
. . . . *decine di bilioni*
. . . . *centinaia di bilioni*
. . . . *trilioni*
. . . . *decine di trilioni*
. . . .

11. Adunque, per trovare il numero degli oggetti d'una collezione data, si aggruppano gli oggetti in unità di vari ordini, non lasciando mai in nessun ordine più di nove unità. Poi si contano separatamente le unità dei vari ordini. Infine, cominciando dall'ordine più elevato, si esprime il numero delle unità che esso contiene e si fa seguire questo numero dal titolo delle unità corrispondenti; e così via successivamente fino all'ordine infimo. Non si fa nessun cenno di quegli ordini, inferiori al più elevato, ne' quali non fosse rimasta alcuna unità. L'espressione risultante è il numero cercato.

12. Imaginando di porre insieme con un oggetto un secondo, e poi di porre nella collezione dei due un nuovo oggetto, e così via indefinitamente, e di esprimere per ciascuna nuova collezione il numero d'oggetti corrispondente, si ottiene la *serie dei numeri*.

Ell'è cosa facilissima dedurre mentalmente da un

(*) Il bilione è detto anche *miliardo*.

numero il successivo, e quindi di recitare la serie dei numeri.

Per conseguenza, per trovare il numero degli oggetti d'una collezione, in luogo di formare i gruppi di vari ordini, ecc. (il che d'altra parte non sarebbe materialmente possibile che in rari casi), si *contano* gli oggetti. [4]. Codesta operazione consiste nell'accoppiare con ciascun oggetto un numero, pronunciando i numeri successivamente nell'ordine in cui si succedono nella serie numerale. Il numero, che corrisponde all'ultimo oggetto, è il numero degli oggetti della collezione. [5].

13. Nella composizione dei numeri l'uso ha consacrato qualche abbreviazione ed anche taluna eccezione alla legge che abbiamo esposta precedentemente. Riesce più semplice indicare codeste deviazioni dalla regola dopo di aver appreso a scrivere i numeri.

Scrittura dei numeri.

14. I numeri si rappresentano per iscritto come ogni altra parola; ma ben più spesso in un modo brevissimo mediante segni e convenzioni particolari.

Intanto, per significare le parole: *uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove,* furono adottate le cifre:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Perciò, ad es., invece di scrivere:

due milioni, quattro migliaia, otto decine,

si può scrivere alquanto più semplicemente:

2 *milioni*, 4 *migliaia*, 8 *decine.*

Per i titoli delle unità dei vari ordini si è trovato modo di poter omettere del tutto di scriverli.

Si è cominciato per ispeditezza a registrare i numeri in un foglio diviso in colonne portanti in testa, ordinatamente da destra a sinistra, i titoli delle unità dei vari ordini. Poi, visto che la pratica dispensava dal leggere i titoli scritti in testa alle colonne, si son soppressi questi titoli; e infine si son soppresse anche le linee di separazione delle colonne tra loro, perchè dal posto occupato da una cifra rispetto a quella delle unità di primo ordine si può conoscere con somma facilità l'ordine delle unità rappresentate dalla cifra.

E perchè può accadere che manchino unità di qualche ordine inferiore al più elevato, si è trovato necessario di adottare un segno da porre nel posto corrispondente all'ordine di cui non ci fossero unità, affine di conservare alle cifre il posto relativo. Questo segno è la cifra 0, che si denomina *zero*.

Ad es., in base alle convenzioni or ora indicate, il numero 4 *centinaia di migliaia*, 2 *migliaia*, 6 *centinaia* e 6 *decine* si può rappresentare scrivendo solamente: 402 660.

15. In un numero scritto ciascuna cifra ha un valore *assoluto*, che si conosce dalla forma, ed ha un valore *relativo*, che dipende dal posto che essa occupa rispetto alla cifra delle unità.

16. Alla domanda: *quanti oggetti ecc.*, può darsi convenga la risposta: *nessuno*. Questa parola ha dunque diritto [6] di esser posta tra i numeri; e la si pone in fatto, però sostituita con la parola *zero*. E così la cifra *zero*, in un numero, si può interpretare come significante *quante* sono le unità di quel certo ordine.

Allo stesso risultato saremmo pervenuti imaginando di togliere da una collezione una cosa alla volta fino al completo esaurimento. Per questa via si giunge alla conchiusione che *zero* è un numero che precede il numero *uno*. (Ma quando si conta si comincia da *uno*).

Semplificazioni nella composizione dei numeri. Eccezioni alla regola.

17. Abbiamo detto che nella composizione dei numeri c'è qualche abbreviazione ed anche qualche irregolarità. Ora, che sappiamo scrivere i numeri, possiamo accennarle con maggiore comodità.

Intanto, dopo letta la cifra delle unità di primo ordine, si suole omettere la qualifica *unità*. Così, ad es., il numero 7 si enuncia semplicemente: *sette*.

Il numero 10, invece di enunciarlo *una decina*, si legge semplicemente: *dieci*.

I numeri 11, 12, 13, 14, 15, 16, invece di leggerli: *dieciuno, diecidue, diecitrè, dieciquattro, diecicinque, diecisei*, come richiederebbe la regola generale, si enunciano: *undici, dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici*.

I numeri 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, invece di *duedieci, tredieci, ecc.*, si leggono: *venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta*.

Il numero 100, invece di leggerlo *un centinaio*, si legge: *cento*.

Così i numeri 200, 300, ecc. si leggono *duecento, trecento*, ecc.

Il numero 1000 si dovrebbe leggere *un migliaio*. Invece si legge semplicemente: *mille*.

Così i numeri 2000, 3000, ecc. si leggono *duemila, tremila*, ecc.

Consideriamo ora il numero 374000. Si dovrebbe leggerlo: *trecento***mila**, *settanta***mila**, *quattro***mila**. Invece, tacendo per le due prime parti la desinenza comune *mila*, si legge: *trecentosettantaquattro***mila**.

Così il numero 370000 si leggerà: *trecentosettanta* **mila.**

Analogamente, ad es., il numero 749000000, che si dovrebbe leggere: *settecento* **milioni,** *quaranta* **milioni,** *nove* **milioni,** si legge invece abbreviato: *settecentoquarantanove* **milioni.**

I numeri 740000000 e 700000000 si devono leggere, il primo: *settecentoquaranta* **milioni** e l'altro, regolarmente,: *settecento* **milioni.**

18. Ora possiamo enunciare la regola secondo cui si leggono i numeri.

Regola 1ª. *Per leggere un numero scritto con tre cifre o meno, si leggono successivamente le cifre, cominciando da sinistra, e pronunciando dopo il nome di ciascuna cifra il titolo delle unità corrispondente al posto occupato dalla cifra.* (*).

Regola 2ª. *Per leggere un numero rappresentato con più di tre cifre, si separano le cifre in classi, ciascuna di tre cifre, partendo da destra (l'ultima classe può constare di due cifre, ed anche di una soltanto). Poi, cominciando da sinistra, si leggono successivamente i numeri rappresentati dalle singole classi, come se fossero isolati, ed in seguito a ciascuno di questi numeri si dice il titolo delle unità dell'ultima sua cifra.*

Ad es., il numero 7240006900415 si legge: *sette* **trilioni,** *duecentoquaranta* **bilioni,** *sei* **milioni,** *novecento* **mila,** *quattrocentoquindici.*

Prime proprietà dei numeri.

19. Def. *Un numero si dice maggiore rispetto a qualunque che lo preceda nella serie numerale e minore di qualunque numero susseguente.*

(*) Rispettando, ben inteso, le eccezioni e modificazioni accennate nel precedente paragrafo.

20. Corollario 1°. (*). *Se un numero è maggiore di un altro, e questo è maggiore di un terzo, il primo è maggiore del terzo.*

21. Cor. 2°. *Un' unità d' un ordine qualunque è maggiore di qualunque numero composto con sole unità degli ordini inferiori.*

Infatti i numeri di due cifre seguono quelli d' una cifra; i numeri di tre cifre seguono quelli di due; ecc. Perciò, ad es., il numero 1000 è maggiore di 999 e di qualunque numero di tre cifre o meno.

22. In base alle proposizioni precedenti è facile riconoscere quale di due numeri scritti è il maggiore.

Se il numero delle cifre è differente, è maggiore il numero che ne ha di più. Ad es., 32006 è maggiore di 968. Infatti una sola delle unità di quarto ordine del primo numero supera [21] il secondo.

Se i numeri hanno egual numero di cifre, come ad es. i numeri 3648219 e 3647998, si confrontano, cominciando da quelle dell' ordine più elevato, le cifre esprimenti unità dello stesso ordine, fino ad incontrarne due disuguali; il numero, che contiene la cifra maggiore, è maggiore. Nel nostro caso il primo numero è il maggiore. Ed infatti anche 3648000 è maggiore di 3647999, dacchè [21] un solo migliaio supera qualunque numero di tre cifre.

23. Finora noi abbiamo considerato i numeri come parole; e per questo modo di vedere è giustificata la precedente [19] definizione (convenzione). (**).

(*) La parola *corollario* significa conseguenza. Una proposizione si dice corollario, s'intende di una proposizione in discorso, quando è una facile conseguenza di codesta proposizione.

(**) Una parola non è maggiore o minore d'un' altra.

Giova spesso, nello studio delle proprietà dei numori, riguardare un numero come un aggregato di cose astratte, ideali, tutto uguali tra loro, invariabili, detto *unità*.

In questo senso, ad es., il numero *cento* è l'aggrogato di *cento* unità. Si noti bono cho qui la parola *cento*, la prima volta esprime un ente ideale, la seconda volta una qualità di questo ento, esprime cioè quante sono le parti (unità) cho lo compòngono. Nel seguito useremo dei numeri talvolta in un senso, tal'altra nell'altro, senza che da ciò abbia origine la minima confusione. (*).

21. Teorema. (**). *Se in un numero si sopprimono alquante cifre a destra, il numero rimanente esprime quante unità, dell'ordine della cifra susseguente a quelle cancellate, sono contenute nel numero dato.* —

Dim. Sia, ad es., il numoro 32417. Cancollando, ad es., due cifro alla destra, rimane il numero 324. Ora si vuol provare che il numero 324, la cui ultima cifra nel numoro dato esprime continaia, esprime quante centinaia sono contenute nel numero dato.

Perciò basta osservare cho, quando si aggruppano secondo la nota leggo gli oggetti d'una colle-

(*) Ma notiamo bene che, se giova riguardare un numero come nna collezione di cose (unità), un numero non è per nulla un aggregato di cose, ma esso è sempre una parola che esprime *quante* sono le cose dell'aggregato. Certe cosidette proprietà dei numeri sono invece proprietà delle corrispondenti collezioni di cose. E perchè le cose possono essere qnalunque, si è finito col riguardare il nnmero stesso come un aggregato di cose, astratte, tutte uguali, dette *unità*.

(**) Si dice *teorema* nna proposizione che mediante un ragionamento si dimostra essere una conseguenza di definizioni o di altre proposizioni accettate senza discnssione.

zione per averne il numero, formati i gruppi d'un ordine qualunque, il seguito dell'operazione ha per iscopo di trovare il numero di questi gruppi. Così nel nostro caso, composte le centinaia, l'operazione, che resta da fare, è appunto quella mediante la quale si determina il numero di codeste unità di terzo ordine, e risulta infine il numero 324.

— **25. Oss.** In base al teorema che precede, dovendo indicare a parole il numero che rimane cancellando da un numero dato la cifra delle unità, si dirà *il numero delle decine* del numero dato.

Per *decine* di un dato numero intenderemo quel numero che rimane quando si sostituisca uno *zero* alla cifra delle unità.

Per *cifra delle decine* si deve intendere invece la cifra che occupa il secondo posto, contando da destra.

Per un numero di due cifre l'espressione *numero delle decine* e l'altra *cifra delle decine* hanno lo stesso significato. —

26. Ora siamo in grado di giustificare, in altra guisa, il modo abbreviato in cui si legge un numero, dopo di averne separate le cifre in gruppi, ciascuno di tre. Ad es., si consideri il numero 14 280 327. Supponendo cancellati i due ultimi gruppi a destra, rimane il numero 14 ad esprimere quanti milioni si erano ottenuti col penultimo aggruppamento. In questa idea il numero può esser letto: *quattordici milioni, duecentomila, ottantamila, trecentoventisette.* Se poi nel numero 280 327, che è la seconda parte del numero dato, si suppongono soppresse le tre ultime cifre, il numero 280 resta ad indicare quante migliaia sono contenute nel numero, epperò lo si può enunciare: *duecentottantamila trecentoventisette.*

CAPITOLO II
ADDIZIONE

Definizioni.

27. Def. *Si dice* somma *di due numeri quel numero che esprime quanti sono gli oggetti della collezione che si ottiene imaginando che formino una collezione sola quelle rappresentate* (*) *dai due numeri dati.*

(Volendo riguardare un numero come un aggregato di unità [23], si può dire che: *si chiama somma di due numeri quel numero che è composto con tutte insieme le unità che compongono i numeri dati*).

Manifestamente per ottenere la somma di due numeri basta *contare* [12] tutti gli oggetti che compongono le collezioni rappresentate dai numeri dati.

Per il caso che le cose formanti le due collezioni siano astratte o incomode a contare, le cose stesse si possono rappresentare con altrettanti oggetti opportuni, o con segni; talvolta con le dita delle mani.

Imaginando di poter disporre della serie numerale scritta e di accoppiare ordinatamente ai numeri gli oggetti, esaurendo prima una delle collezioni, si giunge alla conchiusione che:

28. *La* somma *di due numeri è quel numero a cui si perviene nella serie numerale contando, in seguito al primo dei numeri dati, tanti numeri quanti ne indica il secondo.* (**).

(*) Un disegno, secondo il grado di perfezione, fa conoscere più o meno delle qualità dell'oggetto rappresentato. Un numero *scritto* si può riguardare come un disegno che *rappresenta quanti* sono gli oggetti d'una collezione.

(**) Codesta proprietà della somma di due numeri si po-

Così, ad es., poichè, contando 5 numeri in seguito a 12, si perviene a 17, questo numero è la *somma* di 12 e 5. —

29. L'operazione aritmetica, mediante la quale si trova la somma di due numeri dati, si dice *addizione*; i due numeri si dicono gli *addendi* od anche le *parti* della somma.

Per accennare che si fa l'addizione, ad es., dei numeri 12 e 5, si dice che si *aggiunge*, che si *somma* 5 *a* 12.

L'addizione si indica per iscritto col segno $+$. E così, per indicare, ad es., che aggiungendo 5 a 12 si ottiene 17, si scrive (*):

$$12 + 5 = 17.$$

L'espressione $12 + 5$ rappresenta l'operazione che si deve fare con i numeri 12 e 5, e rappresenta anche la somma di questi numeri mediante le parti.

— **30.** Alla somma di due numeri si può aggiungere un terzo numero, poi al *risultato* un quarto, al nuovo risultato un quinto numero, e così via. Il risultato finale si dice *somma* di tutti i numeri dati. Si rappresenta l'operazione ed anche la somma, scrivendo gli addendi

trebbe assumere come definizione della somma stessa; ma cotale definizione avrebbe il difetto di non potersi generalizzare, dimodochè si dovrebbe mutare nel seguito.

(*) Un insieme di simboli aritmetici (numeri e segni di operazioni) si dice *espressione aritmetica*. Il risultato delle operazioni (calcoli) indicate nell'espressione si dice il *valore dell'espressione*.

Il segno $=$, segno d'*eguaglianza*, si legge: *uguale*. Si adopera cotal segno, quando si vuole indicare per iscritto che due espressioni aritmetiche hanno il medesimo valore.

L'affermazione, scritta, che due espressioni aritmetiche hanno medesimo valore, si chiama *eguaglianza*. L'espressione, che è a sinistra del segno d'eguaglianza, si dice il *primo membro*, e l'altra il *secondo* membro dell'eguaglianza.

successivamente nell'ordine in cui sono dati, interponendo fra ciascuna coppia di due addendi successivi il segno d'addizione. Così, ad es., scrivendo:

$$12 + 100 + 7 + 41 + 2,$$

si indica che alla somma di 12 e 100 si deve aggiungere 7, che alla nuova somma si deve aggiungere 41, ecc.

Scrivendo, ad es.,:

$$12 + (17 + 5),$$

si indica che bisogna aggiungere 5 a 17, ed aggiungere poi il risultato a 12.

31. Dalle precedenti definizioni sull'addizione viene questa conseguenza che:

Qualsivoglia numero è la somma del numero precedente e di uno, *ed anche che un numero è la somma di tante unità quante esso ne esprime.*

Proprietà dell'addizione.

32. Teor. *La somma di più numeri non cambia, se si cambia l'ordine in cui i numeri vengono sommati.* (*).

Dim. Siano, ad es., i numeri:

30, 14, 21, 3, 10,

e questi si debbano sommare nell'ordine in cui sono dati. Proveremo che, scambiandone di posto due consecutivi qualunque, ad es. scambiando tra loro i due 21 e 3, la somma non muta; che si trova dunque lo stesso risultato, sommando i numeri nell'ordine seguente: 30, 14, 3, 21, 10.

(*) In altre parole: *una somma è indipendente dall'ordine in cui si seguono gli addendi.*

Imaginiamo di aver cinque collezioni di oggetti, rispettivamente composte di:

$$30, \quad 14, \quad 21, \quad 3 \quad e \quad 10$$

oggetti, e di accoppiare ordinatamente gli oggetti ai numeri della serie numerale scritta. I numeri, corrispondenti, rispettivamente all' ultimo oggetto della seconda, della terza collezione..., sono quelli che si otterrebbero facendo le addizioni indicate nell' espressione:

$$30 + 14 + 21 + 3 + 10.$$

Ora, scambiando replicatamente di posto, a due a due, gli oggetti della terza e della quarta collezione, noi possiamo ottenere che gli oggetti della terza vengano in seguito a quelli della quarta. Dopo di ciò i numeri corrispondenti all' ultimo oggetto delle singole collezioni sono quelli che si incontrerebbero facendo le addizioni indicate nell' espressione:

$$30 + 14 + 3 + 21 + 10.$$

Ma i due risultati finali sono eguali, perchè o l' ultimo oggetto non è stato mutato di posto od altrimenti non è mutato il posto occupato dall'ultimo oggetto.

Provato così che si possono scambiare due addendi consecutivi, possiamo conchiudere di aver provato che si possono prendere gli addendi in un ordine qualunque senza che resti alterata la somma, dacchè, dati quanti si vogliano oggetti in un ordine qualunque, con lo scambio replicato e conveniente di due oggetti consecutivi, si può ottenere che gli oggetti dall' ordine dato vengano ad esser disposti in un ordine prestabilito qualunque. (*).

(Più semplicemente si potrebbe giustificare la proposizione fondandosi su questo che nel contare degli oggetti è indifferente l' ordine in cui vengono presi successivamente, uno dopo l' altro).

(*) Volendo giustificare questa proposizione generale,

33. Cor. 1°. *In una somma alcuni addendi si possono surrogare con la loro somma effettuata.*

Dim. Ad es., siano da sommare i numeri:

$$48,\quad 35,\quad 5,\quad 10,\quad 39,\quad 12.$$

Dico che alcuni addendi, ad es. i tre 35, 10 e 39, si possono surrogare con la loro somma.

Infatti, poichè nel fare le addizioni successive i numeri dati si possono prendere in un ordine qualunque [32], possiamo cominciare a sommare insieme i numeri 35, 10 e 39; resta poi a far la somma del risultato e degli altri addendi, presi in un ordine qualunque.

34. Cor. 2°. *Invece di aggiungere successivamente* (*) *dei numeri, si può aggiungere la loro somma.*

Dim. Infatti, poichè in una somma alquanti addendi si possono surrogare con la loro somma, invece di effettuare, ad es., le addizioni indicate nell'espressione:

$$100 + 12 + 7 + 49 + 3,$$

si può operare come indica l'espressione:

$$100 + (12 + 7 + 49 + 3).$$

estranea all'Aritmetica, supponiamo di voler disporre nell'ordine, in cui si seguono nell'alfabeto, le seguenti lettere:

$$d,\ e,\ c,\ a,\ f,\ b,$$

e questo unicamente con iscambi di due lettere contigue.

Perciò si comincerà a scambiare successivamente la lettera a con la contigua a sinistra, finchè essa sia arrivata nel primo posto. Poi, senza che occorra muover più la lettera a, si potrà similmente far andare la lettera b nel secondo posto. Ecc.

(*) Con la parola *successivamente* si allude ad operazioni in ciascuna delle quali (che non sia la prima) entra il risultato dell'operazione precedente. Per brevità (indispensabile negli enunciati dei teoremi) i risultati delle singole operazioni non sono accennati nell'enunciato della proposizione. Si possono ritenere indicati abbastanza dalla parola *successivamente.*

35. Cor. 3°. *Dovendo aggiungere una somma, si può invece aggiungere le singole parti successivamente.*

Questa proposizione non è che la precedente enunciata in altro modo.

36. Cor. 4°. *Dovendo sommare insieme più somme, si può far l'addizione di tutte le parti delle somme date.* [35].

37. Cor. 5°. *Aggiungendo un numero ad una parte di una somma, la somma viene aumentata di quel numero.*

Addizione di due numeri di una sola cifra.

38. La somma di due o più numeri si trova in pratica in modo più spedito che non contando [28] i numeri della serie numerale. Ed è codesto artifizio numerico spicciativo che comunemente vien designato dalla parola addizione.

Questo che abbiamo detto non può applicarsi al caso che si debbano sommare due numeri di una sola cifra, cioè due numeri ambidue minori di 10.

Dovendosi, ad es., trovar la somma di 4 e 9, e non avendo la serie numerale scritta, si contano tanti oggetti (*) qualisivogliano, quanti ne indica un addendo. Se gli addendi non sono eguali, gioverà prendere il minore. [32]. Poi si contano gli oggetti, cominciando dal numero che segue l'altro addendo. (**).

Ma tutti i casi che si possono presentare sono registrati nella tavola per l'addizione, che ognuno sin

(*) Bastano in ogni caso e si hanno sempre pronte le dita delle mani.

(**) Come si potrebbe trovare la somma di due nmeri minori di 10, senza ricorrere a nessun oggetto sensibile?

dai primi anni apprende facilmente a memoria; epperò, trattandosi, ad es., dell'addizione 5 + 8, sappiamo dire sull'istante che il totale è 13.

Addizione di un numero di una cifra e di un numero qualunque.

39. Supponiamo che si debba far l'addizione 497 + 6.

Abbiamo già osservato [23] che i numeri si possono pensare come collezioni di oggetti, di unità astratte, tutte uguali tra loro. Possiamo pensare che codeste unità componenti un numero siano raccolte in gruppi dei vari ordini, come indicano le cifre del numero. Allora la somma che dobbiamo trovare è il numero che contiene tutte le unità che ci sono nei due numeri dati. Ponendo, idealmente, le 6 unità del secondo addendo con le unità semplici del primo, nel risultato abbiamo 7 + 6, cioè 13, unità semplici, le quali danno una decina e 3 unità. La decina, posta con le decine, le fa diventar 10, forma dunque un centinaio da mettere insieme con le 4 centinaia. Conchiudiamo in tal modo essere:

$$497 + 6 = 503.$$

Nello stesso modo si possono giustificare le addizioni:

$$50896 + 4 = 50900,$$

$$9999 + 1 = 10000.$$

Facciasi anche l'addizione:

$$27 + 2 + 8 + 5 + 6.$$

Si dirà: 27 e 2, 29; 29 e 8, 37; 37 e 5, 42; 42 e 6, 48. Con l'esercizio si perviene a saper dire francamente le somme successive che si van formando, senza pronunziare, sia pur sottovoce, i numeri da aggiungere. Operando in questo modo si corre minor pericolo di imbrogliarsi nel conteggio. Nel caso considerato si direbbe soltanto: 27, 29, 37, 42, 48.

Addizione di più numeri qualunque.

40. Sia, per es., da far l'addizione:

$$9807 + 12419 + 850.$$

Scriviamo intanto gli addendi, uno sotto l'altro, in modo che le cifre, rappresentanti unità di uno stesso ordine, cadano in una stessa colonna. Sotto si tiri una linea; sotto della linea scriveremo la somma.

$$\begin{array}{r} 9\,8\,0\,7 \\ 1\,2\,4\,1\,9 \\ 8\,5\,0 \\ \hline 2\,3\,0\,7\,6 \end{array}$$

Qui di nuovo ci giova riguardare i numeri come collezioni di unità, tutte uguali fra loro, raccolte in gruppi di vari ordini come indicano le cifre. Sappiamo che la somma ricercata esprime quante unità contiene la collezione composta con tutte le unità che compongono gli addendi. Imaginando di far una collezione sola, si capisce che giova mettere insieme e a parte dalle altre le unità di ciascun ordine, perchè poi contandole si ottiene il numero cercato. Può accadere per altro che nella collezione totale si trovino di qualche ordine più di 9 unità; in questo caso bisogna trarne unità dell'ordine prossimo superiore da mettere insieme con le unità di questo ordine.

Dopo queste premesse, veniamo ai nostri numeri, e cominciamo dalle unità di primo ordine, procedendo dal basso all'alto. Il primo addendo non ne contiene, il secondo ne contiene 9, il terzo 7. In tutto ne abbiamo adunque 16; abbiamo cioè 6 unità di primo ordine, che noteremo sotto, nel posto della somma, più 1 decina da trasportare insieme con le decine. Ecc. Dall'esempio considerato possiamo conchiudere la:

41. Regola. *Per sommare più numeri, si scrivono questi numeri, uno sotto l'altro, in modo che le cifre rappresentanti unità di uno stesso ordine siano in colonna. Poi si sommano le cifre della prima colonna alla destra, e la somma, se non supera 9, si scrive sotto in colonna con le cifre che la hanno data; se invece risulta una somma maggiore di 9, se ne scrive la cifra delle unità, e si ritiene a memoria il numero delle decine* [25] *per sommarlo con le cifre della seconda colonna. Sulle cifre della seconda colonna si opera come con quelle della prima, e si continua nello stesso modo fino ad aver operato con le cifre dell' ultima colonna; l' ultima somma si scrive tutta intera a sinistra delle cifre già calcolate.* (*).

42. Oss. Nel caso che le somme delle cifre di ciascuna delle colonne, di cui parla la regola per l'addizione, fosse minore di 10, non è più necessario procedere ordinatamente da destra a sinistra, ma si possono considerare le colonne in un ordine qualunque.

Notiamo anche questo che la regola per l'addizione non fa cenno particolare delle cifre *zero* che ci fossero negli addendi, e questo perchè la cifra *zero* indicando *nessuna unità*, sommata [27] con qualunque numero, dà il numero stesso.

43. In base alla regola per l'addizione un numero

(*) Per giustificare la regola per l'addizione, avremmo potuto tirare in campo le proprietà di questa operazione. Ma quando le ragioni da addurre sono semplicissime, il citarle dal luogo dove si sono considerate non produce brevità; si può forse dire che risulta meno chiaro ciò che è chiarissimo.

si può scomporre in parti, ciascuna delle quali contenga le unità di uno stesso ordine. Abbiamo, ad es.,: 15709 = 10000 + 5000 + 700 + 9.

Prova dell' addizione.

14. Si chiama *prova* di una operazione una seconda operazione, possibilmente alquanto diversa dalla prima (*), senza essere più laboriosa, e che vale ad accertare l' esattezza dell' operazione stessa.

Per conto dell' addizione, la prova si fa sommando i numeri stessi, procedendo dall' alto al basso del foglio, se la prima volta si è sommato, come di consueto, dal basso all' alto. Si può anche separare gli addendi in gruppi, calcolare per ciascun gruppo la somma dei numeri che lo compongono, e sommare infine le somme parziali. (Conviene operare in questo secondo modo nel caso che gli addendi siano tutti eguali tra loro). Il risultato della prova deve [32, 36] essere lo stesso che quello della prima operazione.

15. Quando il risultato d' una operazione e quello della prova sono eguali, è *probabile* che l' operazione sia stata fatta bene; ma non è *certo*, perchè può darsi che in tutti e due i risultati ci sia un medesimo errore.

Quando i risultati sono differenti, è certo che una delle due operazioni è sbagliata, e bisogna rifare il calcolo con maggiore attenzione.

(*) Ripetendo una operazione, se si è commesso un errore la prima volta, non è improbabile ricadervi. Nel conteggio gli errori sono piuttosto frequenti; e ciò dipende da questo che tutti i numeri sono composti con poche parole. Quindi l' opportunità di controllare le operazioni.

CAPITOLO III

SOTTRAZIONE

Definizioni.

16. Dati due numeri disuguali qualunque, vi è sempre un terzo numero, il quale, aggiunto al minore, dà per risultato il maggiore. Infatti, basta contare nella serie numerale i numeri che seguono il minore dei numeri dati fino ad arrivare al maggiore, per ottenere il numero che ha la proprietà accennata. [28].

17. Def. *Dati due numeri disuguali, si dice* differenza *tra il maggiore dei numeri ed il minore quel* [46] *numero che, sommato col minore, dà per risultato il maggiore.*

18. L'operazione aritmetica, mediante la quale si trova la differenza tra due numeri, si dice *sottrazione* (del numero minore dal maggiore). Il maggiore si chiama *minuendo,* il minore *sottraendo*; la differenza si chiama anche *resto* della sottrazione.

La sottrazione si indica col segno —; e appunto scrivendo prima il minuendo, poi il segno della sottrazione e infine il sottraendo. Perciò, ad es., la scrittura: 18 — 7 indica che si deve sottrarre 7 da 18; vi si vede rappresentata anche la differenza non ancora calcolata.

19. Per definizione ha dunque luogo la seguente relazione:

La somma del sottraendo e del resto di una sottrazione è uguale al minuendo.

50. Il problema: *data la somma di due numeri ed uno di essi, trovare quell' altro*, si risolve mediante una sottrazione. La somma è il minuendo; l'addendo dato è il sottraendo; il resto è l' addendo domandato.

51. Poichè dati due numeri qualunque, esiste sempre [46] un terzo numero che, aggiunto al minore, dà per risultato il maggiore, si può dire che:

52. Def. *La sottrazione è l' operazione aritmetica mediante la quale, data la somma di due numeri ed uno di essi, si trova quell' altro,* anche quando i due numeri siano stati presi a capriccio, nel qual caso non si potrebbe riguardare il maggiore come il risultato di una addizione.

53. Abbiamo visto che la differenza di due numeri si potrebbe trovare nella serie numerale contando i numeri che seguono il sottraendo fino al minuendo. Ma si potrebbe trovare la differenza anche contando a ritroso, partendo dal minuendo, tanti numeri quanti ne indica il sottraendo. Il numero che precede l' ultimo contato è la differenza. E iufatti dal modo con cui fu trovata risulta appunto [28] che, aumentata dal sottraendo, essa dà il minuendo.

54. Dall' ultimo modo, in cui si può trovare una differenza, la sottrazione apparisce come operazione *inversa* dell' addizione. Ed invero, se ad un numero, ad es. a 30, si deve aggiungere 12, si devono contare 12 numeri in un senso; dovendo invece sottrarre 12, si contano 12 numeri nel senso opposto.

Che l' addizione e la sottrazione siano operazioni *inverse* risulta chiaro anche da questo che se, preso un numero qualunque, gli si aggiunge, ad es., 35 e poi si sottrae 35 dal risultato, si torna ad avere il numero primitivo.

Altrettanto ha luogo se prima si sottrae e poi si aggiunge uno stesso numero.

Applicazioni della sottrazione.

55. In pratica si deve ricorrere alla sottrazione quando si voglia sapere quanti oggetti rimangono di una collezione se ne vengano tolti in numero dato. Poichè il numero degli oggetti che si tolgono e quello degli oggetti che rimangono sommati insieme producono il numero degli oggetti della collezione data, basterà fare una sottrazione [52]; il minuendo è il numero totale degli oggetti; il sottraendo è il numero degli oggetti che si tolgono; il resto è il numero degli oggetti che rimangono.

Da codesta applicazione della sottrazione apparisce l'origine del nome della operazione e delle denominazioni dei tre numeri che si considerano in essa.

Un problema, che facilmente si riconduce al precedente e che quindi pur si risolve con una sottrazione, è questo di trovare, date *numericamente* due collezioni di oggetti, quanti oggetti una collezione contenga più dell'altra.

56. Non è assurdo il pensare che le due collezioni di cui si è parlato nel precedente paragrafo siano eguali. Giova quindi estendere il concetto di sottrazione al caso di numeri eguali. In questo caso il resto è sempre lo *zero*.

Proprietà della sottrazione.

57. **Teor**. *Dovendo sottrarre una somma, si può invece sottrarre successivamente le singole parti.*

Dim. Sia l'espressione:

$$100 - (13 + 7 + 41 + 3)$$

nella quale è indicato di fare un' addizione e di sottrar poi il risultato da 100. Si vuol provare che si può invece operare nel modo seguente: sottrarre 13 da 100, poi sottrarre 7 dal resto, poi sottrarre 41 dal nuovo resto, e infine sottrarre 3 dall' ultimo resto.

Imaginando di voler trovare il numero domandato contando a ritroso nella serie numerale [53], bisognerebbe fare l' addizione indicata tra parentesi e poi contare a ritroso tanti numeri, quanti ne indica la somma, partendo da 100. Ora, per contare quanti numeri fa mestieri, non è necessario conoscere la somma, ma basta contarne prima 13, poi 7 in seguito, quindi 41 e infine 3. Queste operazioni successive corrispondono appunto alle sottrazioni sopra indicate.

Così si è dimostrato l' eguaglianza:

$$100-(13+7+41+3)=100-13-7-41-3.$$

58. Scambiando di posto i due membri della precedente uguaglianza, si trova poi che essa esprime il:

Teor. *Dovendo sottrarre successivamente dei numeri, si può invece sottrarre la loro somma (dal primo minuendo).*

59. Teor. *Aumentando o diminuendo di uno stesso numero i termini di una sottrazione, la differenza non muta.*

Dim. Consideriamo, ad es., la sottrazione:

$$12-5,$$

ed un numero qualunque, ad es. 3. Proveremo che sono eguali le differenze:

$$12-5,$$

$$(12+3)-(5+3),$$

$$(12-3)-(5-3).$$

A tal fine si scrivano allineate 12 unità e sotto in corrispondenza alle ultime 5 si scrivano 5 unità.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
							1	1	1	1	1

Ora, supposto che il minuendo ed il sottraendo della sottrazione (12 — 5) siano le collezioni d'unità scritte nelle due linee, è chiaro che per conoscere il resto della sottrazione, basta contare quelle unità del minuendo che non hanno corrispondenti unità del sottraendo. Ed è pur manifesto che, scrivendo in seguito alle due serie di unità uno stesso numero d'unità, o sopprimendo alla destra delle due collezioni uno stesso numero di unità, si vengono ad aumentare o diminuire di uno stesso numero il minuendo ed il sottraendo, senza che resti cambiata la differenza. (1)

Sottrazione nel caso che sottraendo e resto siano di una cifra.

60. La differenza di due numeri in pratica si trova in modo più spedito che non contando, come suggerisce la definizione, termini della serie numerale. E comunemente per sottrazione s'intende codesto artifizio numerico speditivo.

Il caso più semplice della sottrazione è quello in cui sottraendo e resto sono ambidue minori di 10. (Si conchiude che il resto è minore di 10, quando, aggiungendo 10 al sottraendo, risulta un numero maggiore del minuendo).

In tal caso il resto si trova senza difficoltà, perchè, sapendo aggiungere a memoria al sottraendo tutti i nu-

(1) Teor. Dovendo sottrarre una differenza, si può togliere il minuendo e al resto ciò, in- -grasse il sottraendo; es.: 100 - (15 - 8) = 100 - 15 + 8.

meri minori di 10, si scopre subito quale di questi, aggiunto al sottraendo, dà il minuendo.

Così, dovendo, ad es., eseguire la sottrazione 14 — 8, si riconosce anzitutto che il resto è minore di 10, perchè la somma $8 + 10$ è maggiore del minuendo 14; e si conchiude che il resto è 6, trovando mentalmente che è $8 + 6 = 14$.

Sottrazione con due numeri qualunque.

61. Proponiamoci, ad es., di sottrarre 38078 da 249053.

$$\begin{array}{r} 249053 \\ \underline{38078} \\ 210975 \end{array}$$

Scriviamo anzitutto i due numeri, il sottraendo sotto del minuendo, in modo che le cifre che rappresentano unità dello stesso ordine cadano in colonna. Tiriamo sotto una linea; sotto di questa scriveremo il resto.

Poichè il resto, sommato col sottraendo, deve produrre il minuendo, cerchiamo di scrivere, nel posto del residuo, un numero col quale codesta addizione riesca esattamente. In questo caso dobbiamo imaginare di far l'addizione dall' alto al basso. L'addendo, che si conosce, ha 8 per cifra delle unità; manifestamente nel resto ci deve essere una cifra, che con 8 faccia 13 (non può essere che faccia 3); codesta cifra è 5, che si scrive. Ora, quando si somma, si dice: 8 e 5 fanno 13, scrivo 3 e porto 1; questa unità si deve aggiungere a 7, che è la susseguente cifra del sottraendo. A tal punto bisogna determinare la seconda cifra del resto; manifestamente, sommata con 8, non può dare 5; ma deve dare 15. Essa è 7, che si scrive.

Ormai l'artifizio della sottrazione si può dire spiegato; compiendo l'operazione, si conchiude in fine la:

62. Regola. *Per trovare la differenza di due numeri, si scrive il minore sotto del maggiore, in modo che le cifre dello stesso ordine cadano in colonna. Poi, cominciando da destra, si sottrae* [60] *ciascuna cifra del sottraendo dalla corrispondente del minuendo, e si scrive ciascun resto parziale sotto, in colonna con le cifre adoperate. Quando una di queste sottrazioni parziali non si può fare, per renderla possibile si aggiunge mentalmente* 10 *alla cifra del minuendo; ma in tal caso si deve aumentare di* 1 *la cifra successiva del sottraendo.*

63. Il processo della sottrazione si può giustificare in un altro modo, fondandosi sulla proprietà della sottrazione [59] che, aumentando di uno stesso numero il minuendo ed il sottraendo, il resto non muta.

Proponiamoci di nuovo la precedente sottrazione; questa volta riguarderemo il minuendo come una collezione d'unità raggruppate come indicano le cifre, ed il sottraendo come il numero che indica quante unità si devono togliere dalla predetta collezione.

$$\begin{array}{r} 249053 \\ 38078 \\ \hline 210975 \end{array}$$

Cominciando da destra, vediamo intanto di dover sottrarre 8 unità semplici; di così fatte nel minuendo ce ne sono 3 soltanto. Affine di poter effettuare la sottrazione, imaginiamo di aggiungere al minuendo, e nel posto delle unità di primo ordine, 10 unità; altrettante, ossia una decina, aggiungasi, mentalmente, al sottraendo. Con ciò i termini della sottrazione vengono alterati; ma la differenza, che cerchiamo, rimane immutata. [59]. Ora da 13 unità, tirandone via 8, ne restano 5; questa cifra si deve scrivere nel resto.

Passando alle decine, troviamo di doverne sottrarre 8 (si dice 8, perchè or ora si è aggiunto una decina al sottraendo). Qui da capo, affine di poter sottrarre, aggiungeremo 10 decine al minuendo, e poi [59] altrettante, ossia un centinaio, al sottraendo. Ecc.

Prova della sottrazione.

61. Poichè scopo di una sottrazione è di trovare quel numero che, sommato col sottraendo, dà il minuendo, per riconoscere se il resto di una sottrazione è esatto, si sommerà il resto col sottraendo; dovrà risultare il minuendo.

La prova di una sottrazione si potrebbe anche fare sottraendo il resto dal minuendo; deve risultare il sottraendo dato.

CAPITOLO IV

MOLTIPLICAZIONE

Definizioni.

65. Def. *Si dice* prodotto *di due numeri la somma di tanti numeri eguali al primo, quanti ne indica il secondo.* (*).

Il primo dei due numeri si dice *moltiplicando*, il secondo *moltiplicatore*. Moltiplicando e moltiplicatore collettivamente si dicono i *fattori* del prodotto.

66. L'operazione aritmetica mediante la quale si trova il prodotto di due numeri si dice *moltiplicazione* (del moltiplicando per il moltiplicatore).

Si indica una moltiplicazione scrivendo prima il moltiplicando, poi un punto, e infine il moltiplicatore. Così, ad es., la scrittura 15 · 7 (che si legge: 15 *moltiplicato per* 7, od anche più semplicemente 15 *per* 7) rappresenta il prodotto dei numeri 15 e 7, cioè la somma di 7 numeri eguali a 15.

67. Oss. Poichè il moltiplicatore indica quanti sono gli addendi d'una addizione, esso dovrebbe essere uguale almeno a 2. Ma si è trovato opportuno (come vedremo) di ammettere tra i valori che può avere il moltiplicatore l'*unità* ed anche lo *zero*. La definizione di prodotto non si adatta a questi casi;

(*) Riguardando il secondo numero come somma di unità, il prodotto di due numeri si può definire dicendo che esso è quel numero il quale è formato col primo nel modo stesso che il secondo è formato con l'unità.

per essi adunque ne occorre una a posta, ed è la seguente:

68. Def. *Un prodotto, quando il moltiplicatore è uguale ad* uno, *è uguale al moltiplicatore; quando il moltiplicatore è uguale a* zero, *anche il prodotto è uguale a* zero.

69. Oss. *Un prodotto, se il moltiplicando è l' unità, è uguale al moltiplicatore; se il moltiplicando è* zero, *è* zero *anche il prodotto.*

Infatti, ad es., $1 \cdot 7$, significando [65] la somma di 7 numeri eguali ad 1, è uguale a 7. E il prodotto $0 \cdot 7$, poichè è la somma di addendi eguali a *zero*, è uguale a *zero*.

Proprietà della moltiplicazione.

71. Teor. *Un prodotto non cambia, se si cambia l' ordine dei fattori.* (1)

Dim. Prendiamo due numeri qualunque, ad es. i numeri 7 e 4. Proveremo che è:

$$7 \cdot 4 = 4 \cdot 7.$$

A tal fine si scrivano una sotto l' altra quattro righe ciascuna di 7 unità, e poi si imagini di voler conoscere la somma di tutte codeste unità.

```
1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
```

È manifesto che, essendo 4 le righe e contenendo ciascuna 7 unità, basta sommare 4 numeri eguali a 7, cioè moltiplicare 7 per 4.

Ma si poteva anche dire che, poichè le colonne sono 7 e ciascuna colonna contiene 4 unità, basta sommare 7 numeri eguali a 4, cioè moltiplicare 4 per 7.

(1) Dim. Si vuol provare che $7 \cdot 4 = 4 \cdot 7$:

$7 \cdot 4 = (1+1+1+1+1+1+1) \cdot 4$

$7 \cdot 4 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4.$

$7 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

[illegible]

Egli è dunque:

$$7 \cdot 4 = 4 \cdot 7 \qquad \text{c. d. d.}$$

72. Oss. La precedente dimostrazione non si adatta al caso che uno o l'altro dei fattori sia l'unità, oppure lo *zero*; ma il teorema sussiste tuttavia. Infatti abbiamo [68, 69], ad es.,:

$$7 \cdot 1 = 1 \cdot 7,$$
$$7 \cdot 0 = 0 \cdot 7.$$

73. Teor. *Dovendo moltiplicare una somma per un numero, si può invece moltiplicare i singoli addendi per quel numero e sommare i prodotti.* (1)

Dim. Sia, ad es., da moltiplicare la somma:

$$(14 + 7 + 10 + 602) \text{ per } 3.$$

Indicheremo questa moltiplicazione scrivendo:

$$(14 + 7 + 10 + 602)\, 3,$$

dove per semplicità di scrittura, è omesso il segno di moltiplicazione. Secondo quanto sta scritto si dovrebbe far prima l'addizione indicata tra parentesi, e moltiplicar poi il risultato per 3. Proveremo che il medesimo risultato finale si può ottenere operando in un altro modo, e appunto moltiplicando i singoli addendi per 3 e sommando poi i prodotti.

A tal fine, scritti in una riga i numeri che compongono il moltiplicando, si ripeta la riga così da averne tante quante ne indica il moltiplicatore; supponiamo poi di voler trovare la somma di tutti i numeri della tabella. È manifesto che questa somma si può trovare,

14	7	10	602
14	7	10	602
14	7	14	602

o sommando prima i numeri di una riga e moltiplicando il risultato per 3, oppure moltiplicando per 3

(1) Dim: $(15+23+19) \cdot 4 = 15 \cdot 4 + 23 \cdot 4 + 19 \cdot 4$.
Infatti
$(15+23+19) \cdot 4 = (15+23+19) + (15+23+19) + (15+23+19) + (15+23+19)$
" $= 15+23+19+15+23+19+15+23+19+15+23+19$.
" $= (15+15+15+15) + (23+23+23+23) + (19+19+19+19)$.

i singoli numeri di una stessa riga e sommando poi i prodotti. Egli è pertanto:

$$(14 + 7 + 10 + 602)\,3 = 14 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 602 \cdot 3,$$

come dovevamo dimostrare.

74. Teor. *Dovendo moltiplicare un numero per una somma, si può moltiplicare quel numero per i singoli addendi della somma, e sommare i prodotti.* (1)

Dim. Sia proposta, ad es., la moltiplicazione:

$$13\,(4 + 7 + 15).$$

Proveremo che, invece di far l'addizione e poi moltiplicare 13 per il risultato, si può moltiplicare 13 separatamente per le singole parti del moltiplicatore e sommare poi i prodotti.

Infatti, poichè il prodotto è la somma di tanti numeri eguali a 13 quante sono le unità del moltiplicatore, potremo fare le somme parziali di 4, di 7, di 15 numeri eguali a 13, e riunirle poi in una somma sola. E poichè le somme parziali accennate non sono altro che i prodotti di 13 per i numeri 4, 7 e 15, conchiudiamo essere:

$$13\,(4 + 7 + 15) = 13 \cdot 4 + 13 \cdot 7 + 13 \cdot 15,$$

come dovevamo dimostrare.

75. Teor. *Dovendo moltiplicare una somma per una somma, si può invece moltiplicare i singoli termini del moltiplicando per i singoli termini del moltiplicatore, e sommare da ultimo tutti i prodotti parziali.*

Dim. Sia proposto, ad es., di eseguire le operazioni indicate nell'espressione:

$$(9 + 14)\,(7 + 5).$$

Si dovrebbero eseguire le due addizioni, e moltipli-

(1) $a\,(b+c+d) = a.b + a.c + a\,d$.

Infatti:

$a\,(b+c+d) = (b+c+d)\,a$

$a\,(b+c+d) = ba + ca + da$

$a\,(b+c+d = ab + ac + ad$

care poi la prima somma per la seconda. Ora noi sappiamo [74] che, dovendo moltiplicare un numero per una somma, si può invece moltiplicare quel numero per i singoli addendi, e sommare i risultati. Pertanto egli è:

$$(9+14)(7+5)=(9+14)\,7+(9+14)\,5.$$

Sappiamo [73] poi che, dovendo moltiplicare una somma per un numero, si può ottenere lo stesso prodotto anche moltiplicando i singoli addendi per quel numero e sommando poscia i risultati. Quindi è anche [36]:

$$(9+14)(7+5)=9\cdot7+14\cdot7+9\cdot5+14\cdot5,$$

appunto come dovevasi dimostrare.(1)

Moltiplicazione nel caso che i fattori siano ambidue di una sola cifra.

76. Il prodotto di due numeri si può trovare in modo più spedito che non mediante l'addizione che è suggerita dalla definizione. Comunemente è questo artificio aritmetico speditivo, che surroga un'addizione di numeri eguali, che s'intende designato dalla parola moltiplicazione.

Ma nel caso che i fattori siano ambidue minori di 10, per averne il prodotto, non c'è altro modo che operare come indica la definizione, sommare cioè tanti numeri eguali al moltiplicando, quanti ne indica il moltiplicatore. Così, ad es., sommando 5 numeri eguali ad 8, si trova essere $8\cdot5=40$.

Per conteggiare speditamente è indispensabile saper trovare a memoria il prodotto di due numeri qualunque di una sola cifra. Perciò, considerando e registrando tutti i casi possibili, si è formata la *tavola per la moltiplicazione*.

(1) Dim $(a+b+c)\cdot(m+n+p+q)=am+an+ap+aq+$ $+bm+bn+bp+bq+cm+cn+cp+cq.$

Infatti:

$(a+b+c)\cdot(m+n+p+q)=a(m+n+p+q)\cdot b(m+n+p+q)\cdot c(m+n+p+q)$

$(a+b+c)\cdot(m+n+p+q)=am+an+ap+aq+bm+bn+bp+bq+cm+cn\ldots$

La circostanza che un prodotto non muta se si muta l'ordine dei fattori, riduce a minor numero i casi di moltiplicazione che si devono saper a mente, dacchè, ad es., chi sa il prodotto di 8 per 5, sa anche qual sia il prodotto di 5 per 8. (Rimane tuttavia una certa difficoltà la quale si deve attribuire a questo che tutti i numeri sono formati con poche parole distinte, variamente combinate insieme).

Moltiplicazione nel caso che uno dei fattori sia di una sola cifra.

77. Sia, ad es., da moltiplicare 40536 per 7.

Sappiamo [65] che il prodotto richiesto è uguale alla somma di 7 numeri eguali a 40536. Scriviamo questi 7 numeri in colonna, come se volessimo calcolare il prodotto mediante addizione; così scopriremo la regola della moltiplicazione per questo caso.

$$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 40536 \\ 40536 \\ 40536 \\ 40536 \\ 40536 \\ 40536 \\ 40536 \end{array}\right\} 7 \\ \hline 283752 \end{array}$$

Ed ora cominciando, come bisogna [41], dalla colonna delle unità, troviamo di dover fare anzitutto la somma di 7 numeri eguali a 6. Questa prima somma è adunque il prodotto di 6 per 7, che sappiamo [76] fare a memoria. Di codesto prodotto, che è 42, bisogna scrivere [41] la cifra delle unità e *portare* 4.

Passiamo alla seconda colonna. Riservandoci di aggiungere in fine il 4 di *porto*, possiamo dire di nuovo che si tratta di trovare la somma di 7 numeri eguali. Ne prendo uno, lo moltiplico per 7, ed ecco la somma 21, trovata speditamente. Ora aggiungo il 4 di porto, ed ho 25. Scrivo 5, e porto 2.

Non occorre continuare nella spiegazione, perchè l'artificio è ormai chiarito. È poi facile avvedersi come sia superfluo scrivere tutti i numeri eguali, che si dovrebbero sommare. In pratica se ne scrive uno soltanto (il moltiplicando) e sotto, oppure a canto, si scrive, il numero degli addendi, cioè il moltiplicatore.

$$\begin{array}{r} 40546 \\ 7 \\ \hline 283752 \end{array}$$

Da quanto precede risulta la:

Regola. *Per moltiplicare un numero di più cifre per un numero di una sola cifra, si moltiplicano successivamente le singole cifre del moltiplicando per il moltiplicatore, cominciando da destra. Coi singoli prodotti parziali si opera come con le somme parziali che si trovano successivamente quando si fa un' addizione.*

Oss. Dovendo moltiplicare un numero di una cifra per uno di più cifre, si muterà l'ordine dei fattori.

Moltiplicazione nel caso che uno dei fattori sia scritto con una cifra significativa seguita da zeri.

78. Sia, ad es., da moltiplicare 4874 per 700.

Supponendo di ricorrere all'addizione [65], riguardando come moltiplicatore il numero 4874, dovremo scrivere in colonna 4874 numeri tutti eguali a 700. Supponiamo che ciò sia stato fatto, e di intraprendere l' addizione.

Le due prime colonne a destra sono composte di *zeri*; perciò la cifra delle unità e quella delle decine della somma sono due *zeri*. Passando alla terza colonna, troviamo di dover sommare 4874 numeri tutti eguali a 7. Il risultato è [65] il prodotto di 7 per

4874, o di 4874 per 7. Codesta moltiplicazione sapiamo già farla. Effettuandola, si ottiene 34118; e questo numero si deve [39] scrivere a sinistra dei due *zeri* già scritti.

$$\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}700\\700\\700\\700\\\dots\\\dots\\\dots\\700\\700\end{array}\right\}4874\\\hline 34118004874}\end{array}$$

Possiamo conchiudere la:

Regola. *Per moltiplicare per un numero scritto con una cifra significativa seguita da* zeri, *basta moltiplicare il moltiplicando per la detta cifra, e scrivere a destra del risultato tutti gli* zeri *del moltiplicatore.*

79. La dimostrazione e la regola testè ricavata valgono naturalmente anche per il caso che la cifra significativa del moltiplicatore sia l'unità. L'una e l'altra possono tuttavia essere semplificate. Supponiamo infatti che, essendo ancora 4874 il moltiplicando, il moltiplicatore sia 100, in luogo di 700. La terza delle colonne (riportandoci alla precedente dimostrazione) è allora composta di 4874 unità, la cui somma è null'altro che 4874. Per questo caso adunque la regola generale si riduce alla seguente:

Regola. *Per moltiplicare per un numero scritto con l'unità e* zeri, *basta scrivere a destra del moltiplicando tutti gli* zeri *del moltiplicatore.*

80. Oss. Questa regola è compresa nella precedente, la quale indica di moltiplicare il moltiplicando per la cifra significativa del moltiplicatore, perchè, quando questa cifra è l'unità, il prodotto è [68] il moltiplicando stesso. (Così troviamo giustificata l'estensione data al concetto di moltiplicazione, col considerare anche il caso di moltiplicatore uguale all'unità).

81. In base all'ultima regola è, ad es.,:

$$700 \cdot 10 = 7000$$

$$700 \cdot 100 = 70000$$

$$6 \cdot 1000 = 6000 \quad \text{ecc.}$$

Questi esempi ci porgono occasione di osservare la seguente proprietà dei numeri:

Trasportando una cifra di uno, di due, di tre .... posti verso sinistra, si ottiene che la cifra rappresenti rispettivamente un numero 10 *volte,* 100 *volte,* 1000 *volte, ... il numero che rappresentava.*

Moltiplicazione con due numeri qualunque.

82. Ad es., sia da moltiplicare 40536 per 2957.

Sappiamo che il prodotto è uguale alla somma di 2957 numeri tutti eguali al moltiplicando. Questa somma si può ottenere facendo prima delle somme parziali; per il caso nostro ci giova imaginare di farne 4, e per l'appunto, essendo:

$$2957 = 2000 + 900 + 50 + 7,$$

di fare una prima somma di 7 numeri eguali al moltiplicando, poi una di 50, poi una di 900, ed infine una di 2000 addendi. Codeste somme equivalgono ai prodotti:

$$40536 \cdot 7$$

$$40536 \cdot 50$$

$$40536 \cdot 900$$

$$40536 \cdot 2000,$$

```
    40536
     2957
   ------
   283752
  202680
 364824
81072
---------
119864952
```

i quali si ottengono moltiplicando 40536 separatamente per le cifre 7, 5, 9 e 2 e scrivendo poi a destra dei risultati il dovuto numero di *zeri*. In pratica si omette di scrivere questi zeri, e si dispongono per l'addizione i prodotti del moltiplicando per le singole cifre del moltiplicatore, uno sotto l'altro, in modo che le cifre, che rappresentano unità di uno stesso ordine, cadano in una stessa colonna. Dalle considerazioni precedenti risulta la:

Regola. *Per fare il prodotto di due numeri di più cifre, si scrive il moltiplicatore sotto del moltiplicando; poi si moltiplica il moltiplicando separatamente per le singole cifre del moltiplicatore, e si scrivono i prodotti parziali, uno sotto l'altro, con le cifre in colonne e in modo che per ciascun prodotto la prima cifra a destra cada in colonna con quella cifra del moltiplicatore, che si adopera a formarlo. In fine si sommano i prodotti parziali così disposti; la somma è il prodotto cercato.*

83. Oss. Ripetendo la precedente dimostrazione, ma prendendo per moltiplicatore un numero contenente degli zeri tra le sue cifre, come ad es. il numero 204005, si riconosce che nell'eseguire una moltiplicazione non si deve tenere alcun conto di quegli zeri che ci fossero nel moltiplicatore compresi tra altre cifre significative.

Se poi ci fossero nel moltiplicatore anche degli *zeri finali*, si opererebbe da prima senza por mente ad essi; ma in ultima bisognerebbe scriverne altrettanti alla destra del prodotto ottenuto. Così, ad es., dovendo moltiplicare un numero per 2074000, basterà moltiplicare quel numero per 2074, e scrivere in fine *tre zeri* alla destra del prodotto.

Ma nella regola generale per la moltiplicazione non occorre introdurre un cenno relativo agli *zeri* del moltiplicatore, che non siano *zeri finali*, perchè, avendo stabilito [68] che il prodotto di un numero per *zero* sia eguale a *zero*, quando nel moltiplicare si volesse tener conto degli *zeri* del moltiplicatore come d'ogni altra cifra, non si farebbe altro che scrivere nel corso dell'operazione degli *zeri*, che non produrrebbero nessun effetto sul prodotto finale.

84. Supponiamo di dover moltiplicare 8047000 per 409. Cambiando l'ordine dei fattori, troviamo poi che basta moltiplicare 8047 per 409 e scrivere in ultima alla destra del prodotto i tre *zeri finali* del moltiplicando. Ne segue la:

Regola. *Nel caso che due numeri da moltiplicare tra loro contengono degli* zeri finali, *si può prescindere da questi* zeri *e scriverli in fine tutti alla destra del prodotto.*

Prova della moltiplicazione.

85. Per fare la prova di una moltiplicazione si moltiplica il moltiplicatore per il moltiplicando. Se risulta lo stesso prodotto che la prima volta [71], è *probabile* che entrambe le operazioni siano scevre da errore. (Il metodo di prova accennato suppone manifestamente che i fattori siano disuguali. Se sono eguali, non c'è che ripetere la moltiplicazione).

Prodotti di più fattori.

86. Def. *Si dice prodotto di più numeri dati quel numero che si ottiene moltiplicando il primo dei numeri per il secondo, poi il prodotto per il terzo, il nuovo prodotto* *per il quarto e così di seguito fino ad aver moltiplicato per l'ultimo.*

I numeri dati si dicono i *fattori del prodotto*, e si indica l'operazione scrivendo i fattori di seguito l'uno all'altro, interponendo un punto fra ciascuna coppia di fattori successivi.

Così, ad es., la scrittura:

$$24 \cdot 7 \cdot 60 \cdot 12$$

indica che si deve moltiplicare 24 per 7, poi il prodotto per 60 e il nuovo prodotto per 12.

Anche per il prodotto di più di due fattori sussiste il:

87. Teor. *Un prodotto non muta, se si muta l'ordine dei fattori.*

Dim. 1°. Cominceremo la dimostrazione provando che in un prodotto di *tre* fattori si possono scambiar di posto i due ultimi.(1)

Preso, ad es., il prodotto:

$$12 \cdot 5 \cdot 3,$$

si formi la seguente tabella di numeri, tutti eguali al primo fattore. In ogni riga ci sono tanti numeri quante sono le unità del secondo fattore; e le righe sono tante quanto sono le unità del terzo fattore.

12	12	12	12	12
12	12	12	12	12
12	12	12	12	12

Ed ora, supponendo di dover trovare la somma di tutti i numeri della tabella, si vede che si può moltiplicare 12 per 5, perchè così si ottiene la somma di tutti i numeri di una riga, e moltiplicar poi il prodotto per 3, perchè 3 ed eguali sono le righe.

Oppure si può moltiplicar 12 per 3, affine di ottenere la somma dei numeri che sono in una colonna, e

(1) Dim. - Dico che: $12.5.3 = 12.3.5$. Infatti:

$12.5 = 12+12+12+12+12$

$(12.5).3 = (12+12+12+12+12).3$

$12.5.3 = 12.3 + 12.3 + 12.3 + 12.3 + 12.3.$

moltiplicar poi il prodotto per 5, perchè 5 ed eguali sono le colonne.

Conchiudiamo essere:

$$12 \cdot 5 \cdot 3 = 12 \cdot 3 \cdot 5.$$

2°. Ed ora, preso un prodotto qualunque, ad es. il prodotto:

$$5 \cdot 7 \cdot 100 \cdot 11 \cdot 40 \cdot 9,$$

proveremo che si possono scambiare tra loro due fattori consecutivi qualunque siano, ad es. i fattori 11 e 40.

Infatti, trovato il prodotto dei fattori 5, 7 e 100, che è 350, moltiplicando questo numero per 11 ed il prodotto per 40, oppure moltiplicandolo per 40 e poi il prodotto per 11, si ottengono risultati eguali, dacchè in questo momento si tratta di un prodotto di tre fattori, e si è provato che in tal caso si possono scambiar tra loro i due ultimi fattori senza che muti il prodotto.

Per il caso che i fattori da scambiare fossero i due primi, il prodotto resterebbe immutato, perchè per un prodotto di due fattori si è gia fatto vedere che i fattori si possono scambiare tra loro.

3°. Provato che si possono scambiare due fattori consecutivi senza che resti alterato il prodotto possiamo conchiudere che i fattori si possono prendere in un ordine qualunque, perchè mediante lo scambio replicato di due oggetti contigui si può ottenere che oggetti dati in un certo ordine finiscano ad essere disposti in un ordine prestabilito qualunque.

Resta dunque provato che un prodotto è indipendente dall' ordine dei fattori.

88. Cor. 1°. *In un prodotto di più fattori alquanti fattori si possono surrogare col loro prodotto eseguito.*

Dim. Sia, ad es., il prodotto:

$$7 \cdot 45 \cdot 31 \cdot 49 \cdot 6 \cdot 13$$

e consideriamo alquanti fattori, ad es. i fattori 31, 49 e 13. Proveremo che questi fattori si possono surrogare col loro prodotto eseguito.

Infatti, poichè nel fare un prodotto i fattori si possono prendere in un ordine qualunque, possiamo imaginare di cominciare moltiplicando 31 per 49, e di moltiplicare poi il prodotto per 13. Fatto questo, rimangono da moltiplicare tra loro il prodotto ottenuto e gli altri fattori. Così troviamo surrogati i fattori 31, 49 e 13 col loro prodotto eseguito.

89. Cor. 2°. *Invece di moltiplicare successivamente per dei numeri, si può moltiplicare per il prodotto di quei numeri.*

Dim. Sia, ad es., il prodotto:

$$100 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 38.$$

Poichè in un prodotto due o più fattori si possono surrogare col prodotto eseguito, abbiamo:

$$100 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 38 = 100\,(3 \cdot 7 \cdot 38),$$

la quale eguaglianza dice che in luogo di moltiplicare successivamente per 3, 7 e 38, si può moltiplicare per il prodotto di questi numeri.

90. Cor. 3°. *Dovendo moltiplicare per un prodotto, si può invece moltiplicare successivamente per i fattori del prodotto.*

Dim. Scambiando di posto i due membri dell'ultima eguaglianza, otteniamo:

$$100\,(3 \cdot 7 \cdot 18) = 100 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 18,$$

e questa eguaglianza esprime appunto la proposizione or ora enunciata.

91. Cor. 4°. *Per ottenere il prodotto di più prodotti, si può far un prodotto solo con tutti i fattori del moltiplicando e del moltiplicatore.*

Dim. Siano da moltiplicare tra loro i prodotti:

$$5 \cdot 80 \cdot 9 \qquad \text{e} \qquad 4 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 2.$$

Poichè, dovendo moltiplicare per un prodotto, si può [90] moltiplicare successivamente per i singoli fattori, abbiamo:

$$(5 \cdot 80 \cdot 9)(4 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 2) = (5 \cdot 80 \cdot 9)\, 4 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 2.$$

La parentesi del secondo membro si può togliere, perchè per tal soppressione le operazioni non mutano punto. Egli è adunque:

$$(5 \cdot 80 \cdot 9)(4 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 2) = 5 \cdot 80 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 2.$$

Facilmente si estende la dimostrazione al caso di più di due prodotti.

92. Cor. 5°. *Moltiplicando un fattore di un prodotto per un numero, si moltiplica il prodotto per quel numero.*

Dim. Sia, ad es., il prodotto $(71 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 100)$. Dovendo moltiplicarlo, ad es., per 20, si indicherà l'operazione scrivendo:

$$71 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 100 \cdot 20.$$

Considerando ora uno qualunque dei fattori del prodotto dato, ad es. il fattore 4, e rammentando che in un prodotto ad alquanti fattori si può sostuire il loro prodotto eseguito [88], conchiudiamo essere:

$$(71 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 100)\, 20 = 71\,(4 \cdot 20)\, 15 \cdot 100;$$

e questa eguaglianza esprime appunto il teorema che si doveva dimostrare.

Potenze.

93. Può darsi che i fattori di un prodotto siano tutti eguali tra loro.

Il prodotto di parecchi fattori, tutti eguali ad un numero, si dice *potenza* di quel numero.

Uno dei fattori eguali si dice la *base della potenza*; e il numero dei fattori eguali si dice l'*esponente della potenza*, od anche il *grado* della potenza.

Per semplicità di scrittura si suol rappresentare una potenza, cioè un prodotto di fattori eguali, scrivendo uno soltanto dei fattori, e a destra, un poco elevato, l'esponente. Così, ad es., il simbolo 25^7 rappresenta la *settima* potenza di 25, ossia il prodotto di 7 numeri eguali a 25.

La seconda potenza di un numero suol dirsi *quadrato* di quel numero; e la terza potenza è anche detta *cubo* di quel numero.

L'operazione, con cui si trova una potenza di un numero, porta il nome di *elevazione a potenza*. Questa operazione consiste in moltiplicazioni successive i cui moltiplicatori sono tra loro eguali.

Nessuno confonderà un esponente con un fattore; l'errore potrebb'essere enorme. Ad es. si osservi che è:

$$10^5 = 100000 \qquad \text{e} \qquad 10 \cdot 5 = 50.$$

91. Teor. *Il prodotto di due potenze della stessa base è quella potenza della base stessa, che ha per esponente la somma degli esponenti.*

Dim. Consideriamo, ad es., il prodotto:

$$32^7 \cdot 32^4.$$

Poichè i due fattori sono due prodotti, e dovendo moltiplicare tra loro due prodotti si può [81] far un prodotto solo con tutti i fattori del moltiplicando e del moltiplicatore, il prodotto delle due potenze è uguale al prodotto di $7 + 4$ fattori, tutti eguali a 32. Egli è adunque:

$$32^7 \cdot 32^4 = 32^{7+4}, \qquad \text{c. d. d.}$$

95. Oss. È manifesto che è $32^7 \cdot 32 = 32^{7+1}$. In relazione col teorema precedente si riconosce che la base di una potenza si comporta nel calcolo, come una potenza con esponente 1. Per questo giova riguardare un numero quale *prima potenza* di se stesso, e intenderlo dotato dell'esponente 1.

Esercizi.

1. Si dimostri che, se tutte le cifre del moltiplicatore sono dei 9, per ottenere il prodotto basta scrivere altrettanti zeri a destra del moltiplicando, e sottrarre il moltiplicando dal nnmero così formato.
2. Di quanto si aumenta un prodotto, aumentando di una nnità il moltiplicatore? di quanto aumenta, se si accresce di una unità il moltiplicando? [71].
3. Dimostrare che il prodotto di dne fattori diminuisce, quando si anmenti di nna unità il maggiore e si diminuisca d'una unità il minore. (Si prenda il minore per moltiplicatore, e lo si diminnisca di 1. Di qnanto diminuisce perciò il prodotto? Si anmenti ora di 1 l'altro fattore. Di qnanto cresce perciò il prodotto? ecc.).
4. Se si prendono qnattro nnmeri consecutivi, il prodotto dei medi snpera di 2 il prodotto degli estremi.
5. Il qnadrato di un numero supera di una unità il prodotto del numero antecedente per il numero snccessivo.
6. Si moltiplichi il numero 347 per 1001001001. Si giustifichi la singolarità del prodotto. (Si consideri il moltiplicatore come somma di unità di vari ordini e si moltiplichi poi come suggerisce il teorema 74).
7. Dimostrare che il prodotto di due numeri ha tante cifre, qnante ne hanno insieme i dne fattori, o una di meno. (Posto, ad es., che il moltiplicatore sia composto di quat-

tro cifre, si prenderà per moltiplicatore una volta 1000, e un'altra 10000).

8. Dimostrare la regola, enunciata nel § 84, mediante i teoremi 79, 91 ed 88.

9. Dimostrare che la somma di due numeri, aumentata della loro differenza, è uguale al doppio del numero maggiore; e che la somma di due numeri, diminuita della loro differenza, è uguale al doppio del numero minore. [37, 59].

10. Dimostrare che, per ottenere il prodotto di una differenza per un numero, si può moltiplicare minuendo e sottraendo per questo numero, e poi sottrarre dal primo prodotto il secondo. (Supposto che a, b, c rappresentino ordinatamente minuendo, sottraendo e resto, si parta dall'eguaglianza $a = b + c$. [73]).

11. Dimostrare che il numero 37, moltiplicato per un numero della forma $3 \cdot m$, dove m rappresenta un numero d'una cifra, dà un prodotto composto di cifre tutte uguali ad m. [89].

12. Dimostrare che la differenza tra un numero di tre cifre e quel numero, che si ottiene scrivendo le tre cifre nell'ordine opposto, è uguale al prodotto di 99 per la differenza delle cifre estreme. [59].

CAPITOLO V

DIVISIONE

Definizioni e prime loro conseguenze.

96. Def. *Si dice* quoziente *di due numeri quel numero che indica quante volte il secondo si può sottrarre successivamente, cominciando dal primo.*

L'operazione aritmetica mediante la quale si trova il quoziente di due numeri si dice *divisione*; il primo dei due numeri si dice *dividendo*, il secondo *divisore.*

97. Def. *Dividere un numero per un altro significa trovare il numero che esprime quante volte il secondo dei numeri dati si può sottrarre successivamente, cominciando dal primo.*

Ad es., dividendo 95 per 30, si trova 3 per quoziente, dacchè, cominciando da 95, il numero 30 si può sottrarre 3 volte.

98. Il resto dell'ultima delle sottrazioni di una divisione si dice il *resto della divisione.*

Il resto della divisione di 95 per 30 è 5.

99. Quando il dividendo è minore del divisore, il divisore non si può sottrarre neanche una volta, epperò in questo caso il quoziente è *zero*, e il dividendo stesso è il resto della divisione.

100. Teor. *Il quoziente di una divisione è il maggior numero per il quale si può moltiplicare il divisore, senza ottenere prodotto che superi il dividendo.*

Dim. Dividendo, ad es., 95 per 30, si trova 3 per quoziente. Ora proveremo che il prodotto di 30 per 3 non può superare 95, e che il prodotto di 30 per 4 lo supera.

Infatti, poichè 3 è il quoziente della divisione di 95 per 30, possiamo [96] dire che, cominciando da 95, il numero 30 si può sottrarre 3 volte e non 4.

E perchè sottrarre successivamente dei numeri o sottrarre la loro somma torna lo stesso [58], possiamo dire che da 95 si può sottrarre la somma di 3 numeri eguali a 30 e non la somma di 4 di codesti numeri. In altre parole: da 95 si può sottrarre il prodotto di 30 per 3 e non quello di 30 per 4, come d. d.

101. Teor. *Dati due numeri, il maggior numero per il quale si può moltiplicare il secondo senza che risulti prodotto maggiore del primo, è il quoziente della divisione del primo per il secondo.*

Dim. Prendendo, ad es., i numeri 95 e 30, troviamo che il prodotto di 30 per 3 non supera 95, e che il prodotto di 30 per 4 lo supera. Proveremo che 3 è il quoziente della divisione di 95 per 30.

Infatti, se il quoziente, ad es., fosse 5, allora per il precedente teorema sarebbe 5 e non 3 il maggior numero per cui si può moltiplicare 30 senza che il prodotto superi 95; e ciò contrariamente all'ipotesi.

102. In virtù dei due teoremi precedenti le definizioni che abbiamo dato di *quoziente* e di *divisione* equivalgono alle due seguenti:

103. Def. *Si dice* quoziente *di due numeri dati il maggior numero per il quale si può moltiplicare il secondo senza che risulti prodotto maggiore del primo.*

104. Def. *Dividere un numero per un altro significa trovare il maggior numero per il quale si può mol-*

tiplicare il secondo, senza che risulti un prodotto maggiore del primo.

105. La seconda definizione di quoziente [103] lascia capire che, invece che con successive sottrazioni, un quoziente si può determinare mediante moltiplicazioni. Infatti, moltiplicando il divisore per i numeri successivi e confrontando i prodotti col dividendo, si arriva necessariamente a scoprire il maggior numero per cui si può moltiplicare il divisore senza ottenere prodotto che superi il dividendo.

Se le moltiplicazioni accennate si dovessero eseguir tutte, il secondo metodo sarebbe più laborioso di quello delle sottrazioni successive. Ma poichè le moltiplicazioni sono indipendenti l' una dall' altra, provando con moltiplicatori a salto, esse per la massima parte si possono risparmiare.

Combinando insieme i due metodi risulta una operazione spedita per trovare il quoziente. Comunemente è questa operazione che si intende designata dalla parola *divisione*.

Relazione tra dividendo, divisore, quoziente e resto.

106. Teor. *Il dividendo è uguale al prodotto del divisore per il quoziente, più il resto della divisione.*

Dim. Prendendo 95 per dividendo e 30 per divisore, si trova 3 per quoziente e 5 per resto. Proveremo essere:

$$95 = 30 \cdot 3 + 5.$$

Infatti, poichè sottraendo 30 successivamente 3 volte, cominciando da 95, si ottiene per resto 5; e perchè, invece di sottrarre successivamente dei numeri, si può [58] sottrarre la loro somma, possiamo dire che:

sottraendo da 95 la somma di 3 numeri eguali a 30, cioè [65] il prodotto di 30 per 3, si ottiene per resto 5. Per conseguenza [49] egli è:

$$95 = 30 \cdot 3 + 5, \qquad \text{c. d. d.}$$

107. Cor. *Quando il resto di una divisione è zero il dividendo è uguale al prodotto del divisore per il quoziente.*

108. Quando il resto di una divisione è *zero*, si dice che il divisore è *contenuto esattamente* nel dividendo; od anche che il dividendo è *divisibile* per il divisore.

Numero delle cifre d'un quoziente.

109. Teor. *Il quoziente d'una divisione ha tante cifre, più uno, quanti sono gli zeri che si possono scrivere alla destra del divisore, senza ottenere un numero che superi il dividendo.*

Dim. Ad es., sia 745128 il dividendo e 94 il divisore. Dico che il quoziente ha 4 cifre, perchè al più si possono scrivere 3 zeri a destra di 94, senza ottenere un numero che superi il dividendo.

Infatti, poichè scrivere 3 zeri a destra d'un numero equivale [79] a moltiplicare il numero per 1000, e 94000 non supera il dividendo, il quoziente è [103] almeno 1000.

E perchè, scrivendo 4 zeri a destra di 94, cioè [79] moltiplicando 94 per 10000, si ottiene un numero maggiore del dividendo, il quoziente è [103] minore di 10000, epperò non può superare 9999. In conchiusione il quoziente è [103] almeno 1000 e al più 9999; per conseguenza esso ha 4 cifre, c. d. d.

110. Cor. *Se, scrivendo uno zero a destra del divisore, si ottiene un numero maggiore del dividendo, il quoziente ha una sola cifra.*

Divisione quando il quoziente è di una cifra.

111. Quando il quoziente d' una divisione è minore di 10, la divisione si effettua con tutta speditezza. Distingueremo, nella ricerca della regola, tre casi, secondo cioè che anche il divisore è d' una sola cifra, oppure è composto d' una cifra significativa ed uno o più zeri; od è un numero di più cifre, qualunque.

112. 1°. Ad es., sia da dividere 43 per 8. Poichè 80 è maggiore del dividendo, il quoziente è d' una sola cifra. [110].

Sapendo a memoria la tavola di moltiplicazione, si riconosce immediatamente che 5 è il maggior numero, per il quale si può moltiplicare 8, senza ottenere prodotto che superi 43. Il quoziente [103] di 43 per 8 è dunque 5; e perchè, sottraendo (8 · 5) da 43, si ottiene 3, il resto della divisione è 3.

113. 2°. Per secondo caso proponiamoci la divisione di 46089 per 7000.

Poichè, dovendo moltiplicare 7000 per un numero qualunque, si moltiplica la cifra 7 per questo numero e si scrivono tre zeri a destra del prodotto, il prodotto di 7000 per un numero supera o no 46089, secondo che il prodotto della cifra 7 per il moltiplicatore supera o no il numero 46 (che è ricavato dal dividendo sopprimendo alla destra tante cifre quanti sono gli zeri del divisore). Per conseguenza il maggior numero, per il quale si può moltiplicare 7000 senza ottenere prodotto che superi 46089, è nel tempo stesso il maggior numero per il quale si può moltiplicare 7 senza ottenere prodotto maggiore di 46. In altre parole [103] il quoziente della divisione di 46089 per 7000 è uguale al quoziente della divisione di 46 per 7. Possiamo quindi conchiudere in generale la:

Regola. *Quando il divisore è composto di una cifra significativa seguita da zeri, per trovare il quoziente, si può prescindere dagli zeri del divisore e da altrettante cifre a destra del dividendo.* (*).

Es. Il quoziente della divisione di 7162804 per 900000 è lo stesso che il quoziente della divisione di 71 per 9. Esso è dunque 7. E perchè il resto della divisione ausiliaria è 8, il resto della divisione proposta è 862804.

114. 3°. Passiamo al caso in cui, essendo tuttavia il quoziente d'una sola cifra, il divisore è un numero qualunque. Per fermare le idee, proponiamoci di dividere 5961 per 784.

Poichè il quoziente è 9 al più, moltiplicando il divisore per 5 e poi per le cifre successive maggiori di 5 o per le minori, secondo che il prodotto per 5 è minore o maggiore del dividendo, con 5 moltiplicazioni al più si arriverà a conoscere il quoziente. [103]. Giova per risparmiare alcuni di codesti tentativi l'artifizio seguente.

Nel divisore si sostituiscano con *zeri* tutte le cifre, fuori della prima a sinistra, chè in tal modo ci si

(*) Si perviene alla stessa conchiusione, imaginando di voler trovare il quoziente mediante successive sottrazioni [96], perchè (come facilmente si può riconoscere) il numero delle volte che si può sottrarre 7000, cominciando da 46089, è nel tempo stesso il numero delle volte che si può sottrarre 7, cominciando da 46.

riconduce al caso precedente. (*). Dividendo 5961 per 700, si trova per quoziente 8. Così possiamo [103] dire che il prodotto di 700 per 9 è maggiore di 5961, e quindi è maggiore di questo numero, a più forte ragione, il prodotto di 784 per 9. Il quoziente, che cerchiamo, è dunque 8 al più (non possiamo dire che il quoziente sia 8, per questo solo che sappiamo che il prodotto di 700 per 9 supera 5961). Così, volendo trovare il quoziente per tentativi, è naturale di cominciare le prove dalla cifra 8. Se il prodotto del divisore per 8 non supera il dividendo, 8 è il quoziente. Quando risulti un prodotto maggiore di 5961, si prova la cifra 7; ecc.

Nel nostro caso, poichè il prodotto:

$$784 \cdot 8 = 6272$$

è maggiore del dividendo, la cifra 8 è da *rigettare* come troppo *forte*; e si *assaggia* il 7. Poiche il prodotto $784 \cdot 7 = 5488$ non supera il dividendo, il quoziente è 7.

Effettuando la sottrazione 5961 — 5488, si trova il resto della divisione.

Divisione con due numeri qualunque.

115. Proponiamoci, ad es., di dividere 9637024 per 283.

Il numero, che intendiamo di determinare, è [96] quello che esprime quante volte bisogna sottrarre 283, cominciando da 9637024, per giungere ad un resto

(*) A dir vero il quoziente di codesta divisione ausiliaria potrebb'essere maggiore di 9. Qualora si presenti questo caso, la prima cifra da provare è 9.

minore di 283; ma si può dire eziandio [103] che esso è il maggior numero, per il quale si può moltiplicare 283, senza ottenere un prodotto che superi 9637024.

Abbiamo adunque due modi per determinare il quoziente; o con sottrazioni successive, o mediante moltiplicazioni; egli è per l'appunto nell'uso combinato e disciplinato di tutti e due questi espedienti che consiste l'operazione di che ora ci occupiamo. (*).

Abbiamo già osservato che il secondo metodo, per ciò che le moltiplicazioni sono indipendenti le une dalle altre, conduce più spedito a scoprire il quoziente. Volendo usare di codesto metodo, è naturale di scegliere per moltiplicatori, per i primi saggi, i numeri composti con l'unità e zeri, perchè con questi numeri i prodotti si trovano [79] con la massima facilità. Nel caso nostro, tra questi prodotti, quello di 283 per 10000 è il più grande, che si possa sottrarre dal dividendo. Il quoziente è perciò almeno eguale a 10000, ma dev'essere minore di 100000; il quoziente ha dunque cinque cifre.

(*) Si rende più agevole l'intelligenza di quanto segue, tracciando prima un abbozzo del processo della divisione.

Imaginando di voler trovare il quoziente mediante moltiplicazioni, per un primo saggio si moltiplichi il divisore 283, ad es., per 560. Poichè il prodotto 158480, che risulta, è notevolmente minore del dividendo, si capisce che il quoziente è notevolmente maggiore di 560.

A tal punto, supponendo per un poco di aver cambiato pensiero, e di voler trovare il quoziente mediante successive sottrazioni, è facile avvedersi che si può trarre profitto dalla moltiplicazione già eseguita; infatti, sottraendo il prodotto 158480 dal dividendo, d'nn solo tratto si ottiene lo stesso effetto, come se si fossero eseguite una dopo l'altra 560 sottrazioni. Dopo ciò, per ottenere il quoziente, si dovrebbe sottrarre snccessivamente il divisore 283, cominciando dal resto 9478544;

Per conoscere il maggiore dei prodotti in discorso, ci siamo presentate mentalmente le sottrazioni:

$$\begin{array}{r}9637024\\2830\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}9637024\\28300\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}9637024\\283000\\\hline\end{array}$$

e, per decidere se codeste sottrazioni fossero possibili o no, si faceva astrazione dagli zeri scritti alla destra del divisore e dalle corrispondenti cifre del minuendo. L'ultima sottrazione, che abbiamo trovata possibile, fu dunque la seguente:

$$\begin{array}{r}9637024\\2830000\\\hline\end{array}$$

e per questo possiamo dire che il divisore 283 non supera il numero 963 a cui è sottoposto, e che 2830, decuplo del divisore, deve superare questo numero (perchè altrimenti anche il prodotto di 283 per 100000 si potrebbe sottrarre dal dividendo).

perchè poi basterebbe aggiungere a 560 il numero delle nuove sottrazioni.

Il numero, che si deve aggiungere a 560, è dunqne anch'esso un quoziente, e per l'appunto il quoziente della divisione del resto 9478544 per il divisore 283. Qui di nuovo, imaginando di tornar al metodo delle moltiplicazioni, moltiplichiamo il divisore per nn nnmero a caso, ad es. per 12250. E perchè il prodotto 3466750, è minore del nnovo dividendo 9478544, si capisce che il quoziente relativo alla nnova divisione è maggiore di 12250. Ma qui da capo, invece di provar subito un nuovo moltiplicatore, si vede opportuno di sottrarre il prodotto dal resto 9478544, perchè cosi si vengono a fare d'un tratto altre 12250 sottrazioni. Il nuovo resto diventerebbe a sua volta nn nuovo dividendo, ecc.

Non è diverso in sostanza il processo della divisione; soltanto, invece di prendere a caso i successivi moltiplicatori, si scelgono in modo da ottenere una dopo l'altra le cifre del quoziente, cominciando da qnella dell'ordine più elevato.

E qui, per conto del numero delle cifre del quoziente, notiamo che quella d'ordine supremo è dello stesso ordine di quello della cifra del dividendo sotto cui viene a cadere la cifra delle unità del divisore.

Ritorniamo all'argomento. Ora che sappiamo che il quoziente è almeno 10000, ed al più 99999, dobbiamo fare altri tentativi con numeri compresi tra questi limiti; i nuovi saggi sono da fare naturalmente co' numeri 20000, 30000, 40000 . . . , perchè anche in questo caso i prodotti si ottengono agevolmente, moltiplicando [78] cioè il divisore per i numeri 2, 3, 4..... e scrivendo poi quattro zeri a destra di ciascun prodotto. E quando confrontiamo uno di questi prodotti col dividendo, facciamo astrazione dai quattro zeri finali e da altrettante cifre alla destra del dividendo, perchè evidentemente uno di questi prodotti si può sottrarre o no dal dividendo, secondo che il prodotto di 283 per la prima cifra del moltiplicatore, che si assaggia, si può sottrarre o no da 963. Ora, il maggior numero, per cui si può moltiplicare 283 senza ottenere un prodotto che superi 963, è il quoziente della divisione di 963 per 283.

E perchè il quoziente di codesta divisione [113] ausiliaria è 3, possiamo conchiudere che il prodotto di 283 per 30000 non supera 9637024, e che questo numero è superato dal prodotto di 283 per 40000. Pertanto il quoziente della divisione proposta è almeno 30000, e al più 39999; epperò, qualunque esso sia, esso è composto con cinque cifre, e la prima di queste è 3.

Il nostro ragionamento è generale, epperò possiamo conchiudere la seguente:

116. Regola. *Separando a sinistra del dividendo* *tante cifre, quante bastano a formare un numero che contenga il divisore, e dividendo questo numero per il divisore, si ottiene la prima cifra del quoziente. Questa prima cifra è dello stesso ordine di quello dell' ultima (a destra) delle cifre che si sono separate dal dividendo.*

Riprendendo la nostra divisione, quando si volesse determinare il quoziente unicamente mediante moltiplicazioni, si dovrebbe fare una prova con un numero maggiore di 30000 è minore di 40000.

Fingendo per un poco di voler ricorrere al metodo delle sottrazioni successive, si presenta spontanea l' idea di moltiplicare il divisore per 30000, e di sottrarre poi il prodotto dal dividendo, giacchè con questa operazione d' un tratto si perviene allo stesso resto, come se si fossero eseguite, una dopo l' altra, 30000 sottrazioni.

$$\begin{array}{r|l} 9637024 & 283 \\ \cline{2-2} 8490000 & 30000 \\ \cline{1-1} 1147024 & \end{array}$$

Infatti il prodotto, che si vuol sottrarre, è appunto la somma di 30000 numeri eguali al divisore, e si sa che sottrarre una somma, o sottrarre successivamente le parti torna lo stesso. Effettuando il calcolo, si trova per residuo 1147024; e per ciò che esso è maggiore del divisore, si comprende che occorrono altre sottrazioni per ottenere in fine un resto minore del divisore 283; ed è chiaro che il quoziente, che stiamo ricercando, è maggiore di 30000 per l' appunto di tante unità, quante volte ancora il 283 si può sottrarre, cominciando da 1147024. In altre parole la parte incognita del quoziente (la quale si dovrà aggiungere a 30000) è [96] niente altro che il quoziente della divisione di 1147024 per 283.

A tal punto possiamo dire d'aver trovato il processo secondo cui si compie la divisione, dacchè la regola, che abbiamo trovato per determinare la prima cifra del quoziente, si può far valere a determinare la seconda, e quindi anche le rimanenti, una dopo dell'altra.

Seguendo codesta regola, dobbiamo intanto separare a sinistra del resto 1147024 quattro cifre, perchè tante bastano a darci un numero che contenga il divisore. E perchè l'ultima delle cifre separate è del quarto ordine, il quoziente parziale, che siamo per determinare, è composto di quattro cifre. Dividendo il numero separato, cioè 1147, per 283, si trova per quoziente 4; questa è la seconda cifra del quoziente.

9637024	283
8490000	30000
1147024	4000
1132000	
15024	

Ora che sappiamo che dal resto 1147024 il divisore si può sottrarre 4000 volte e non 5000, moltiplicheremo il divisore per 4000, e sottrarremo il prodotto dal resto. Al nuovo residuo 15024 si perviene dopo 4000 sottrazioni, ove si parta da 1147024; dopo 34000 sottrazioni, quando si cominci a sottrarre 283 dal numero 9637024.

Poichè 15024 è maggiore di 283, il quoziente è maggiore di 34000; e lo supera appunto di tante unità, quante volte 283 si può sottrarre da 15024 e dai resti successivi. La parte ancora ignota del quoziente (e che si dovrà aggiungere a 34000) non è dunque altra cosa che il quoziente della divisione di 15024 per 283. Ormai il processo della divisione si può dire trovato, e lo studioso saprà compiere l' incominciata divisione.

9637024	283
8490000	30000
1147024	4000
1132000	50
15024	3
14150	
874	
849	
25	

9637024	283
849	34053
1147	
1132	
1502	
1415	
874	
849	
25	

Ci restano da fare alcune osservazioni, affine di poter raccogliere da quanto precede la regola pratica per la divisione.

Si dicono intanto *dividendi parziali* i numeri, che si dividono uno dopo l'altro per il divisore, affine di ottenere le singole cifre del quoziente. Nel nostro esempio i dividendi parziali sono: 963, 1147, 150, 1502, 874.

Poi, osservando il procedimento dell'operazione, si riconosce che alcune cifre del dividendo, più di tutte le ultime a destra, vengono trascritte più volte per formare i resti successivi, prima che vengano adoperate veramente nel calcolo delle cifre del quoziente. Per ispeditezza, in pratica, si scrivono allora soltanto che occorre veramente di farne uso, e si tralascia quindi di scrivere quegli zeri che si dovrebbero porre a destra dei prodotti del divisore per le singole cifre del quoziente. Le cifre del dividendo vengono così calate una per volta, e ad ogni cifra, che discende dal posto del dividendo, corrisponde una cifra dello stesso ordine nel quoziente. Codeste cifre del quoziente vengono scritte, una in seguito all'altra, a misura che sono date dal calcolo.

Ora possiamo enunciare la regola generale per la divisione.

117. Regola. *Per dividere l'uno per l'altro due numeri dati:*

Si separano nel dividendo alla sinistra tante cifre quante bastano a formare un numero che contenga il divisore; si divide questo numero per il divisore, e così si ottiene la prima cifra del quoziente (quella d'ordine più elevato).

Si calcola il resto della divisione, che ha fornito la prima cifra del quoziente, e alla sua destra si scrive quella cifra del dividendo che segue le cifre già separate.

Il numero, così formato, è il nuovo dividendo parziale; dividendolo per il divisore, si ottiene la seconda cifra del quoziente.

A destra del resto di quest'ultima divisione si scrive quella cifra del dividendo, la quale segue l'ultima che si è calata.

Il numero, così formato, è il nuovo dividendo parziale; dividendolo per il divisore, si ottiene quella cifra del quoziente, che segue l'ultima determinata.

Così si continua, finchè non vi siano altre cifre del dividendo da calare. L'ultimo resto è il resto della divisione.

118. Oss. 1ª. Un dividendo parziale potrebb'essere minore del divisore. In tal caso si scrive uno *zero* [99] come nuova cifra del quoziente, e calando una nuova cifra, a canto dell'ultimo dividendo, si forma il dividendo successivo.

Oss. 2ª. Quando il quoziente di una divisione debba avere un gran numero di cifre, e il divisore non sia semplice assai, si rende l'operazione più facile e spedita preparando una tavola dei prodotti del

Esempio.

3775360366208	286
286	13200560721
915	
858	
573	
572	
1603	
1430	
1736	
1716	
2062	
2002	
600	
572	
288	
286	
2	

1	286
2	572
3	858
4	1144
5	1430
6	1716
7	2002
8	2288
9	2574

divisore per i primi nove numeri. (*). Con questa si trovano immediatamente, senza bisogno di prove, le cifre del quoziente, e si hanno pronti quei prodotti che si devono sottrarre dai dividendi parziali.

Oss. 3ª. Quando il divisore è di una sola cifra, allora la divisione si effettua con tutta facilità e speditezza. In tal caso infatti (poichè in ogni divisione parziale, oltre del quoziente, anche il divisore è d'una

(*) Questi prodotti *elementari* si formano aggiungendo replicatamente il divisore. Ottenuto il nonuplo, gli si aggiunga il divisore; deve risultare il decuplo del divisore. Ciò vale a verificare d'un tratto tutti i multipli.

sola cifra) i quozienti delle divisioni parziali si trovano con somma facilità [112]; e si fanno a memoria [76] i prodotti che si devono sottrarre dai dividendi parziali. Le sottrazioni sono pure semplicissime, dacchè i residui (dovendo essere minori del divisore, che è d'una sola cifra) sono minori di 10. Perciò anche le sottrazioni si fanno mentalmente, senza scrivere i sottraendi, e si notano soltanto i residui, alla cui destra si calano poi le cifre del dividendo, come richiede la regola della divisione.

$$\begin{array}{r|l} 43675 & 7 \\ \cline{2-2} 42 & 6239 \\ \cline{1-1} 16 & \\ 14 & \\ \cline{1-1} 27 & \\ 21 & \\ \cline{1-1} 65 & \\ 63 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 43675 & 7 \\ \cline{2-2} 16 & 6239 \\ 27 & \\ 65 & \\ 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 43675 & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 6239 \end{array}$$

Come esempio, eseguiamo la divisione di 43675 per 7. Operiamo prima per disteso, secondo la regola generale [117], poi col processo abbreviato.

Un po' d'esercizio mette in grado di risparmiare di scrivere i successivi residui, e in grado di pensare i dividendi parziali, senza scriverli. Operando così, viene scritto soltanto il quoziente ed il resto finale. Ad es., nella divisione di 43675 per 7, si dice:

43 diviso 7, dà 6 (che si scrive),

6 per 7, 42; dal 43, 1.

16 diviso 7, dà 2 (che si scrive),

2 per 7, 14; dal 16, 2.

27 diviso 7, dà 3 (che si scrive),

3 per 7, 21; dal 27, 6.
65 diviso 7, dà 9 (che si scrive),
7 per 9, 63; dal 65, 2 (che si scrive).

119. Le divisioni, nelle quali quoziente e residuo si possono trovare nel modo più semplice, sono quelle in cui il divisore è uno dei numeri 10, 100, 1000, ecc. Infatti sia, ad es., da dividere 27385 per 1000.

Supponendo di voler determinare il quoziente e il residuo finale col sottrarre successivamente il divisore, è manifesto che le tre ultime cifre del dividendo (perciò che il divisore ha tre zeri finali) passano immutate di resto in resto fino all'ultimo, e che ogni sottrazione non fa altro che diminuire di una unità il numero che precede le dette tre cifre. Così con 27 sottrazioni si perviene al resto 385. Possiamo adunque enunciare la:

Regola. *Quando il divisore è un numero composto con l'unità seguita da zeri, il quoziente si ottiene col sopprimere a destra del dividendo tante cifre, quanti sono gli zeri del divisore. E il numero rappresentato dalle cifre cancellate è il resto della divisione.*

120. Nella stessa maniera si dimostra la seguente:

Regola. *Quando il divisore termina con uno o più zeri, si può prescindere da questi zeri finali e da altrettante cifre a destra nel dividendo. Queste cifre si scriveranno alla destra del resto della divisione ausiliaria, se si vorrà conoscere il resto della divisione proposta.*

Ad es., dovendo dividere 384740 per 27000, basterà dividere 384 per 27; e scrivendo il numero 740 a destra del residuo, si otterrà il resto della proposta divisione.

Metodo per provare le cifre del quoziente.

121. Ora che sappiamo eseguire speditamente ogni divisione, il cui divisore sia di una cifra, possiamo indicare un processo, sovente più comodo di quello che conosciamo [114], per accertare le cifre date da quelle divisioni parziali che si fanno in una divisione.

E per fermare le idee, supponiamo che sia 42164 un dividendo parziale, ed 8726 il divisore.

Sappiamo che si comincia a dividere 42 per 8, e che, perchè il quoziente 5 sia il quoziente cercato, bisogna che moltiplicando 8726 per 5 si ottenga un prodotto che non superi 42164. Possiamo anche [71] dire che la cifra 5 è il quoziente cercato, se il prodotto di 5 per 8726 non supera 42164. Vien deciso spesso, più prontamente che con la moltiplicazione, se la 5 cifra ha o no l'indicata proprietà, dividendo 42164 per 5. Si sa [96] che il quoziente che si trova è il maggior numero per il quale si può moltiplicare 5, senza ottenere prodotto che superi 42164. Se il quoziente di questa divisione ausiliaria sarà più grande di 8726, si potrà conchiudere che il prodotto di 5 per 8726, ossia [71] il prodotto di 8726 per 5, non supera il dividendo; epperò la cifra 5 sarà da ritenere. Quando invece risultasse un numero minore del divisore 8726, allora si potrà conchiudere che, moltiplicando 8726 per 5, si otterrebbe prodotto maggiore del dividendo; epperò la cifra 5 sarà troppo forte.

La ragione, per cui questo metodo merita d'essere prescelto, è dovuta a questo che per solito già le prime cifre del quoziente ausiliario fanno intendere se la cifra da assaggiare sia quella che si cerca, ovvero sia troppo grande: laddove, ricorrendo alla moltiplicazione, è soltanto ad operazione compiuta che si riconosce se la cifra in prova si possa accettare o no.

Applichiamo questo artifizio per provare la cifra 5 avuta dividendo 42 per 8. Prendo adunque 5 per divisore, e mentalmente divido 42164. Non iscriverò il quoziente, ma invece lo confronterò cifra per cifra, a mano a mano che lo otterrò, col numero 8726. Operando, trovo 8 per prima cifra, e 2 per residuo. La seconda cifra è 4, laddove la seconda cifra del divisore è 7. Non occorre seguitare nell'operazione, perchè tanto basta a far capire che 5 è troppo forte. Infatti, il maggior numero, per cui posso moltiplicare 5 senza ottenere un prodotto maggiore di 42164, comincia così: *ottomila quattrocento....* Se moltiplicherò 8726 per 5, avrò dunque un prodotto maggiore del dividendo.

42164	8726
	5

Proviamo la cifra 4. Dividendo 42 per 4, ottengo 10. Non occorre di più per poter dire che la cifra 4 è buona. Ed invero, neanco *diecimila*, moltiplicato per 4, mi dà un prodotto maggiore del dividendo; a maggior ragione potrò moltiplicare 8726 per 4, senza che mi risulti un prodotto maggiore di 42164. Ma tale è appunto la condizione perchè la cifra 4 possa essere accettata.

Prova della divisione.

122. Per fare la prova della divisione, si moltiplica il divisore per il quoziente, e si aggiunge il resto al prodotto. Qualora risulti il dividendo, si ha [106] una forte probabilità che l'operazione sia stata fatta a dovere; altrimenti una almeno delle due operazioni, la divisione cioè o la prova, sarà affetta da errore.

123. Oss. Nella regola precedente per la prova della divisione è sottinteso che il resto della divisione sia minore del divisore; altrimenti la prova potrebbe riuscire, e cionondimeno la divisione non sarebbe compiuta a dovere.

Proprietà della divisione.

124. Teor. *Se si moltiplicano per uno stesso numero il dividendo e il divisore di una divisione, il quoziente non muta; ed il resto viene moltiplicato per quel numero.*

Dim. Ad es., dividendo 67 per 15, si trova 4 per quoziente e 7 per resto. Dico che, ove si moltiplichino 67 e 15 per uno stesso numero qualunque, ad es. per 23, e si divida il prodotto $(67 \cdot 23)$ per il prodotto $(15 \cdot 23)$, si trova di nuovo 4 per quoziente, e per resto il prodotto $(7 \cdot 23)$.

Infatti, poichè 4 è il quoziente della divisione di 67 per 15, e 7 è il resto, possiamo riguardare il 67 come la somma di 5 numeri, 4 eguali a 15, e l'ultimo eguale a 7. Abbiamo adunque:

$$67 = 15 + 15 + 15 + 15 + 7.$$

I due membri di questa eguaglianza rappresentano, sebbene in diverso modo, il medesimo numero; moltiplicandoli per uno stesso numero, qualunque esso sia, si avranno risultati eguali. Il secondo membro poi è una somma, e sappiamo che, dovendo moltiplicare una somma per un numero, si può invece [73] moltiplicare le singole parti per il moltiplicatore, e sommare poi i prodotti parziali. Così, prendendo per moltiplicatore il numero 23, abbiamo:

$67 \cdot 23 = 15 \cdot 23 + 15 \cdot 23 + 15 \cdot 23 + 15 \cdot 23 + 7 \cdot 23.$

Notisi ora che 7, ultima delle parti di 67, è minore delle altre, perchè essa è il resto della divisione eseguita con 15 quale divisore; epperò anche il prodotto $(7 \cdot 23)$ è minore di $(15 \cdot 23)$. Poi, osservando la precedente uguaglianza, si riconosce che, sottraendo successivamente il numero $(15 \cdot 23)$, cominciando da $(67 \cdot 23)$, dopo 4 sottrazioni si deve ottenere $(7 \cdot 23)$ per residuo. Pertanto $(67 \cdot 23)$, diviso per $(15 \cdot 23)$, dà 4 per quoziente, e per resto il prodotto $(7 \cdot 23)$. Appunto c. d. d.

125. Teor. *Un prodotto è divisibile per uno qualunque de' suoi fattori e il quoziente è il prodotto degli altri fattori.*

Dim. Consideriamo, ad es., il prodotto:

$$8 \cdot 14 \cdot 5 \cdot 42.$$

Proveremo che, dividendo questo prodotto per uno dei fattori, ad es. per 5, si ottiene per quoziente il prodotto $(8 \cdot 14 \cdot 42)$, e nessun resto.

Infatti il prodotto in questione si può [88] considerare come risultante dal moltiplicare 5 per il numero $(8 \cdot 14 \cdot 42)$, epperò [65] si può anche riguardarlo come somma di tanti numeri eguali a 5, quante sono le unità del prodotto $(8 \cdot 14 \cdot 42)$. Da ciò risulta che, se dal prodotto dato si sottragga 5, e si continui a sottrarre 5 dai resti successivi, dopo $(8 \cdot 14 \cdot 42)$ sottrazioni si deve trovare *zero* per resto. Appunto c. d. d.

126. Oss. Dovendo dividere, ad es., il prodotto $(47 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 130)$ per 14, possiamo [125] dire che il quoziente è (47 · 7 · 130). Si dice in tal caso che con la divisione per 14 si è *soppresso* il fattore 14.

127. Teor. *Il quoziente della divisione di un numero per il prodotto di più fattori si può trovare anche dividendo successivamante per i singoli fattori.*

Dim. 1°. Consideriamo dapprima il caso in cui il numero dato è divisibile per il prodotto, e sia, ad es., da dividere il numero 420 per 42, che è il prodotto dei numeri 2, 3 e 7. Dico che si può trovare il quoziente (invece che col dividere 420 per 42) dividendo 420 per 2, poi il quoziente per 3, e in fine il nuovo quoziente per 7.

Intanto, essendo 10 il quoziente della prima divisione, e non essendoci resto, abbiamo:

$$420 = 42 \cdot 10, \qquad \text{ossia:}$$

$$420 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10.$$

Ora è manifesto che, dividendo il numero 420 per 2, si ottiene [125] il quoziente (3 · 7 · 10). Dividendo questo quoziente per 3, si ottiene per nuovo quoziente (7 · 10). E finalmente, dividendo per 7, risulta per quoziente finale lo stesso numero 10, che si era ottenuto d' un tratto con la divisione di 420 per il prodotto (2 · 3 · 7). (*).

2°. Passiamo a considerare il caso in cui la divisione lascia resto. Proveremo, ad es., che, poichè dividendo 47 per 6 (che è il prodotto di 2 per 3) si ottiene per quoziente 7, dividendo 47 per 2, e il quoziente per 3, si deve trovare in fine di nuovo lo stesso quoziente 7.

Intanto, poichè dividendo 47 per 6 si ha 7 per

(*) Giova osservare che nel caso considerato le divisioni parziali successive si compiono tutte [125] senza residuo.

quoziente, il numero 47 si può riguardare come la somma di 7 numeri eguali a 6, ed un altro (il residuo 5) minore necessariamente di 6. Osservando l'eguaglianza:

$$47 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 5,$$

e notando che $6 = 2 \cdot 3$ è la somma di 3 numeri eguali a 2, si riconosce che sottraendo il numero 2 replicatamente, cominciando da 47, dopo $(3 \cdot 7)$ sottrazioni si giunge allo stesso residno, che si era ottenuto dividendo 47 per 6. E perchè codesto residuo è minore di 6, se pure siano possibili altre sottrazioni, il loro numero è minore di 3. Da tutto ciò si conchiude intanto che il quoziente della divisione di 47 per 2 è uguale a:

$$3 \cdot 7 + \text{un numero minore di } 3.$$

Ora è chiaro che, dividendo [97] questo quoziente per 3, dopo 7 sottrazioni, si ottiene un residuo minore di 3. Il nuovo quoziente è adunque 7; e così per il caso che il divisore sia il prodotto di due fattori soltanto, il teorema è dimostrato.

Ma è facilissimo estenderlo al caso in cui i fattori siano più di 2. Posto, ad es., che il divisore sia il prodotto $(2 \cdot 3 \cdot 7)$, noi lo possiamo riguardare [88] come prodotto dei due fattori $(2 \cdot 3)$ e 7; epperò, ricondotti al caso precedente, possiamo dire che, in luogo di dividere per il prodotto $(2 \cdot 3 \cdot 7)$, si può dividere prima per 7, e poi il quoziente per $(2 \cdot 3)$. E di nuovo, invece di fare quest' ultima divisione, potremo dividere, prima per 2, e poi il quoziente per 3. Così il teorema resta pienamente dimostrato.

Oss. In fine, moltiplicando il divisore per l'ultimo quoziente e sottraendo il prodotto dal dividendo, si otterrà il residuo della divisione; se questo residuo sarà minore del divisore, si avrà la prova che tutta l'operazione è esente da errore.

128. Teor. *Il quoziente di due potenze dello stesso numero è uguale a quella potenza dello stesso numero, che ha per esponente la differenza tra l'esponente del dividendo e quello del divisore.*

Dim. Sia da dividere 32^7 per 32^3; dico essere 32^{7-3}, ossia 32^4, il quoziente.

Rammentiamoci perciò che in un prodotto si può [88] sostituire ad alquanti fattori il loro prodotto effettuato: Nel dividendo, che è il prodotto di 7 fattori eguali a 32, si sostituisca a tre di questi il loro prodotto 32^3, ed ai quattro rimanenti il loro prodotto 32^4. Così abbiamo il dividendo sotto la forma $(32^3 \cdot 32^4)$. Ed ora è manifesto [125] che, quando si divide 32^7 per 32^3, si ottiene per quoziente 32^4. Per l'appunto c. d. d.

Applicazioni della divisione.

129. I problemi, per i quali giova ricorrere alla divisione, si riducono ai due tipi seguenti:

130. 1°. *Data una collezione di unità, trovare quante collezioni, tutte di uno stesso numero indicato di unità, si possono ricavare dalla collezione data.*

Es. Si domanda quanti drappelli ciascuno di 12 soldati si possono ricavare da una compagnia di 100 soldati.

È manifesto che il numero da determinare è il numero delle volte che, cominciando dal numero degli oggetti della collezione data, si può sottrarre successivamente quello degli oggetti di ciascuna delle collezioni che si devono ricavare. In altre parole, il numero chiesto è il quoziente della divisione del primo dei numeri dati per il secondo.

Nel problema ora considerato si tratta di *spartire*, di *dividere* una collezione. Si riconosce l'origine delle parole *divisione* e *dividendo*.

La denominazione del *quoziente* è da attribuirsi a ciò che esso esprime *quante volte* (*quoties*) si può sottrarre il divisore, cominciando dal dividendo.

131. 2°. *Data una collezione d'oggetti, determinare, dovendo dividere la collezione in un numero dato di parti eguali, quanti oggetti conterrà ciascuna delle parti.*

Es. Dividendo una compagnia di 100 soldati in 8 drappelli eguali, quanti soldati formeranno ciascun drappello?

Un modo di risolvere in pratica il problema sarebbe di togliere dalla collezione data tanti oggetti quante sono le parti da fare, e cominciare a comporre le parti attribuendo un oggetto a ciascuna. Si prenderebbero poi di nuovo tanti oggetti quante sono le parti, e si attribuirebbe un nuovo oggetto a ciascuna parte. E così via. Così è reso manifesto che il numero domandato è il numero delle sottrazioni che si possono fare, e quindi il quoziente di una divisione.

132. Oss. Confrontando i due problemi che abbiamo considerato, riconosciamo che in tutti e due si tratta di spartire una collezione data in parti eguali; ma nel primo è noto il numero degli oggetti che devono formare ciascuna parte, e si deve trovare il numero delle parti. Nel secondo invece è noto il numero delle parti, e si deve trovare il numero degli oggetti che devono comporre ciascuna parte.

133. Notiamo infine che è con una divisione che si risolve il seguente problema numerico:

Dato il prodotto di due numeri ed uno dei fattori, trovare l'altro fattore.

134. La moltiplicazione e la divisione si possono quindi considerare come due operazioni *inverse*. Ed infatti, se dopo di aver moltiplicato per un numero si divide per lo stesso numero il risultato, si torna ad avere il moltiplicando primitivo.

Esercizi.

13. Che resti si otterrebbero, dividendo per uno stesso numero altrettanti numeri consecutivi?
14. Se, dopo eseguita una divisione, si divide il dividendo per il quoziente, si troverà per quoziente il divisore, e lo stesso resto che nell'altra divisione? (Si rifletta al teor. 106, e che il resto di una divisione può essere minore, uguale o maggiore del quoziente. Si esamini ciascuno di questi casi).
15. In qual caso si può aumentare il divisore di una o più unità, senza alterare il quoziente? (Quando il resto supera il quoziente, ecc. Il divisore indica quante volte almeno si può sottrarre il quoziente; ma, se il resto supera ecc.).
16. Fuor del caso in cui il quoziente è nullo, il dividendo è necessariamente maggiore del doppio del resto.
17. Si dimostri che il numero delle cifre di un quoziente è uguale alla differenza tra il numero delle cifre del dividendo e quello delle cifre del divisore; oppure a codesta differenza diminuita di una unità.
18. Dimostrare che, dividendo il numero $(ab - 1)$ per a, si trova $(b - 1)$ per quoziente ed $(a - 1)$ per resto.
19. Avendo divisi parecchi numeri per uno stesso divisore, come si può trovare il quoziente della somma dei dividendi per lo stesso divisore?
20. Trovare il maggior numero che è contenuto in 72814 e che, diviso per 217, dà per resto 31.

CAPITOLO VI

DIVISIBILITÀ

Definizioni e teoremi sulla divisibilità.

135. Accade spesso di voler esprimere che un numero è uguale alla somma di più numeri eguali ad un altro, senza poi determinare quante sono le parti. A tal uopo si dice che il primo numero è *multiplo* del secondo, appunto perchè si può ottenerlo moltiplicando il secondo per un conveniente moltiplicatore.

La predetta relazione tra i due numeri si accenna, più spesso, dicendo che il primo numero è *divisibile* per il secondo [108] o che questo *divide* il primo (lasciando sottinteso l'avverbio *esattamente*). Infatti, in tal caso, se si divide il primo numero per il secondo, il resto della divisione è lo *zero*.

Così, ad es., per esprimere che 35 è la somma di alquanti numeri eguali a 7, si dice che 35 è *multiplo* di 7, oppure che 35 è *divisibile* per 7, oppure che 7 *divide* 35. Si dice anche che 7 è un *divisore*, un *fattore* di 35.

Quando ci occorra di rappresentare un multiplo di un numero, senza che poi ci importi di far conoscere se esso ne sia piuttosto il doppio, il decuplo od altro, scriveremo il divisore, segnandolo superiormente con un accento. Perciò, ad es., il simbolo $\dot{7}$ (che si leggerà: *multiplo di* 7) ci rappresenta un multiplo di 7. (Rammentiamo che tra i multipli di un numero si considera il numero stesso ed anche lo *zero* [68]).

Così, ad es., sapendo che 245, diviso per 33, dà per resto 14, possiamo [106] scrivere:

$$245 = \dot{33} + 14;$$

e per converso, da questa eguaglianza (dappoichè 14 è minore di 33) si comprende che, dividendo 245 per 33, si ottiene 14 come resto della divisione.

L' oggetto di questo capitolo è di ricercare dei metodi di facile applicazione, che permettano di determinare i resti delle divisioni di un numero qualunque per certi divisori, senza eseguire le divisioni (*), ed in conseguenza di riconoscere agevolmente se un dato numero sia o no divisibile per questi divisori. Dobbiamo premettere la dimostrazione di alcune proposizioni.

136. Teor. *La somma di quanti si vogliano multipli di un numero è anch' essa un multiplo di questo numero.* (**).

Dim. I numeri a, b, c, siano tutti multipli di m. Dico che anche la somma $(a + b + c)$ è un mulplo di m.

Infatti, ciascuno dei numeri a, b, c, perchè è un multiplo di m, si può riguardare come somma di parti tutte uguali ad m. E perchè, per ottenere la somma di più somme, basta fare l' addizione di tutte le parti delle somme parziali, anche la somma dei numeri dati si può dire composta di parti tutte uguali ad m. Essa è dunque un multiplo di m, come d. d.

137. Cor. *Un numero, che divide un altro, divide qualunque multiplo di questo numero.*

(*) Il metodo per trovare il resto non ha pregio se non quando esso sia più spedito della divisione.

(**) Codesto teorema si può anche enunciare dicendo: *Se un numero divide parecchi altri, divide anche la loro somma.*

Dim. Il numero a divida il numero b; dico che esso divide qualunque multiplo di b.

Infatti, un multiplo di b non è altro che una somma di parti tutte uguali a b. E poichè tutte queste parti sono multiple di a, anche la loro somma (cioè il multiplo di b) è [136] un multiplo di a, è divisibile per a.

138. Teor. *Se un numero divide una parte di una somma, la somma e l'altra parte, divise per quel numero, danno resti eguali.*

Dim. Il numero a sia la somma dei due numeri b e c, e la parte b sia divisibile per m. Dico che la somma a e l'altra parte c, divise per m, devono dare resti eguali.

Intanto, supposto che, dividendo c per m, si trovi il resto r, abbiamo:

$$c = \dot{m} + r.$$

Egli è poi per ipotesi:

$$b = \dot{m}.$$

Da queste uguaglianze, sommando, otteniamo:

$$b + c = \dot{m} + \dot{m} + r,$$

ossia [136]:

$$a = \dot{m} + r.$$

Codesta relazione mostra che a, diviso per m, da r per resto; appunto c. d. d. (*).

(*) Basterebbe, per la dimostrazione, osservare che sottraendo m successivamente, cominciando da a, dopo alquante sottrazioni si deve trovare per resto c. Epperò il resto finale della divisione di a per m è quello stesso della divisione di c per m. (Il numero c è uno di quei resti, per i quali si passa prima di arrivare all'ultimo, quando si divida a per m, sottraendo m replicatamente).

139. Cor. *Se un numero divide una somma ed una delle parti, esso divide anche l'altra parte.* (*).

Dim. Infatti, poichè quel numero divide una delle parti, la somma e l'altra parte, divise per esso, devono dare resti eguali. [138]. Ma per ipotesi la somma dà per resto *zero*; quindi anche l'altra parte dà par resto *zero*, e. d. d.

140. Teor. *Un numero, che divida il dividendo e il divisore di una divisione, divide anche il resto.*

Dim. Dividendo il numero a per b, si ottenga per resto r. Dico che ogni numero, che divide a e b, divide anche il resto r.

Poichè a, b ed r sono ordinatamente dividendo, divisore e resto di una divisione, possiamo [108, 135] scrivere l'eguaglianza:

$$a = \breve{b} + r.$$

Ora si osservi che ogni numero, il quale divida a e b, divide la somma a, e divide la prima parte $\breve{b}$ (perchè un numero che divide un altro ne divide [137] i multipli); esso deve quindi [139] dividere anche l'altra parte r, che è il resto, c. d. d.

141. Teor. *Se un numero divide il divisore e il resto di una divisione, esso divide anche il dividendo.*

Dim. Dividendo il numero a per b, si ottenga per resto r. Dico che ogni numero, che divide b ed r, divide necessariamente anche il dividendo a.

Scrivasi l'eguaglianza:

$$a = \breve{b} + r,$$

(*) Codesta proposizione si può anche enunciare dicendo: *Se un numero divide due altri, esso divide anche la loro differenza.* E ciò perchè una parte di una somma è la differenza tra la somma e l'altra parte.

e si osservi che ogni numero, che divide b, divide [137] la prima parte del secondo membro, che è multipla di b. Ecco che qualunque numero, che divide b ed r, divide le due parti della somma a, epperò [136] esso divide anche la somma, c. d. d.

142. Teor. *Se più numeri si dividono per uno stesso divisore, la somma dei numeri dati e la somma dei resti, divise per lo stesso divisore, danno resti eguali.*

Dim. Consideriamo, ad es., i numeri a, b, c. Dividiamoli per uno stesso numero, ad es. per m; e siano rispettivamente p, q, r i resti delle divisioni. Dico che la somma $(a + b + c)$ e la somma $(p + q + r)$, divise per m, devono dare resti eguali.

Intanto possiamo scrivere [108, 135]:

$$a = \breve{m} + p$$
$$b = \breve{m} + q$$
$$c = \breve{m} + r \quad \text{epperò [33, 136]:}$$
$$(a + b + c) = \breve{m} + (p + q + r).$$

Qui vediamo che m divide una delle parti di una somma; quindi [138] la somma $(a + b + c)$ e l'altra parte $(p + q + r)$, divise per m, danno resti eguali; c. d. d.

143. Teor. *Se più numeri si dividono per uno stesso divisore, il prodotto dei numeri dati e il prodotto dei resti, divisi per lo stesso divisore, danno resti eguali.*

Dim. Dividansi i numeri a, b, c per uno stesso numero, ad es. per m, e siano rispettivamente p, q, r i resti delle divisioni. Dico che il prodotto $(a \cdot b \cdot c)$ ed il prodotto $(p \cdot q \cdot r)$, divisi per m, danno resti eguali.

Intanto possiamo scrivere [108, 135]:

$$a = \breve{m} + p$$
$$b = \breve{m} + q$$
$$c = \breve{m} + r.$$

I due membri di ciascuna di queste eguaglianze rappresentano, se pure in diverso modo, il medesimo numero. Il prodotto dei primi membri delle prime due è quindi eguale al prodotto dei secondi. E poichè i secondi membri hanno forma di somma, al momento di farne il prodotto, ci rammenteremo che, dovendo moltiplicare una somma per una somma, si può [75] invece moltiplicare i singoli termini del moltiplicando per i singoli termini del moltiplicatore, e sommar poi i prodotti parziali. Operando in questo modo, si trovano quattro prodotti parziali; i tre primi sono manifestamente dei multipli di m, tale è quindi [136] anche la loro somma. Abbiamo pertanto:

$$a \cdot b = \breve{m} + (p \cdot q).$$

Nello stesso modo da codesta eguaglianza e dalla terza delle precedenti si conchiude essere:

$$a \cdot b \cdot c = \breve{m} + (p \cdot q \cdot r).$$

Ora vediamo che m divide una delle due parti di una somma; quindi [138] la somma $(a \cdot b \cdot c)$ e l'altra parte $(p \cdot q \cdot r)$, divise per m, danno resti eguali. C. d. d.

Divisori 2 e 5.

141. Teor. *Il resto della divisione di un numero qualunque per* 2 *o per* 5 *è uguale al resto della divisione per* 2 *o per* 5 *della cifra delle unità del numero stesso.*

Dim. Sia, ad es., il numero 4679. Dico che, dividendolo per 2 o per 5, si trova lo stesso resto, che dividendo per 2 o per 5 la sua ultima cifra.

Infatti, poichè 4679 si può considerare [24] come la somma di 467 decine e della cifra 9, e 10 è multiplo di 2 e di 5, possiamo scrivere [136]:

$$4679 = \breve{2} + 9,$$

$$4679 = \breve{5} + 9.$$

Ma sappiamo [138] che, se un numero divide una parte di una somma, la somma e l'altra parte, divise per quel numero, danno resti eguali. Quindi 4679 e l'ultima cifra 9, divisi per 2 o per 5, danno resti eguali. C. d. d.

145. Cor. *Un numero è divisibile per* 2 *o per* 5, *se la cifra delle unità è divisibile per* 2 *o per* 5.

Dim. Infatti abbiamo veduto che il resto della divisione per 2 o per 5 di un numero, qualunque esso sia, è uguale al resto della divisione per 2 o per 5 della cifra delle unità del numero stesso. I resti saranno dunque ambidue uguali a zero, od ambidue diversi da zero.

Oss. I numeri di una sola cifra divisibili per 2 sono: 0, 2, 4, 6, 8. Quindi soltanto i numeri, che terminano con una di queste cifre, sono divisibili per 2.

Oss. I numeri di una sola cifra divisibili per 5 sono: 0 e 5. Perciò soltanto i numeri, che terminano per 0 o per 5, sono divisibili per 5.

Oss. I numeri divisibili per 2 si dicono *pari*; gli altri *dispari*.

146. Oss. Nello stesso modo si possono stabilire le condizioni di divisibilità per 4 e per 25, per 8 e per 125.

Divisore 9.

147. Lemma. *Un numero qualunque è uguale ad un multiplo di 9 aumentato del numero delle decine e della cifra delle unità.*

Dim. Sia, ad es., il numero 45067. Questo numero si può considerare come la somma di 4506 numeri eguali a 10, più 7. E perchè 10 è eguale a $9 + 1$, possiamo dire [33] che 45067 è uguale ad un multiplo di 9, più 4506, più 7, come d. d.

148. Teor. *Un numero qualunque è uguale ad un multiplo di 9, aumentato della somma delle sue cifre.*

Dim. Sia, ad es., il numero 72108. Applicando il lemma precedente e la proposizione [136] che la somma di multipli di un numero è un multiplo del numero stesso, otteniamo successivamente [33]:

$$\begin{aligned} 72108 &= \dot{9} + 7210 + 8 \\ \text{»} &= \dot{9} + 721 + 8 \\ \text{»} &= \dot{9} + 72 + 1 + 8 \\ \text{»} &= \dot{9} + 7 + 2 + 1 + 8, \end{aligned}$$

epperò in fine [33]:

$$72108 = \dot{9} + (7 + 2 + 1 + 8), \text{ c. d. d.}$$

149. Teor. *Il resto della divisione per 9 di un numero qualunque è uguale al resto, che si ottiene dividendo per 9 la somma delle cifre del numero.*

Dim. Sia, ad es., il numero 70187. Dico che, dividendo per 9 questo numero, e dividendo per 9 la somma delle sue cifre, si trovano resti eguali.

Infatti, poichè un numero qualunque è [148] uguale a un multiplo di 9, aumentato della somma delle sue cifre, abbiamo intanto:

$$70187 = \dot{9} + (7 + 1 + 8 + 7).$$

Sappiamo poi [138] che, se un numero divide una parte di una somma, la somma e l'altra parte, divise per lo stesso numero, danno resti eguali. Quindi, poichè 9 divide la prima parte del secondo membro, il numero 70187 e la somma delle sue cifre $(7 + 1 + 8 + 7)$, divisi per 9, danno lo stesso resto, c. d. d.

150. Cor. *Un numero è divisibile per* 9, *se la somma delle sue cifre è divisibile per* 9.

Dim. Sappiamo infatti che un numero e la somma delle sue cifre, divisi per 9, danno resti uguali. Quindi nel solo caso che la somma delle cifre di un numero, divisa per 9, dia per resto *zero*, anche il numero è divisibile per 9.

151. Oss. Quando si fa la somma delle cifre di un numero per conoscere il resto della divisione per 9, si può [96] mentalmente sottrarre 9 ogni volta che la somma parziale trovata fino a quel punto eguagli o superi 9. (In particolare si possono trascurare le cifre 9 e quelle la cui somma sia eguale a 9).

Divisore 3.

152. Teor. *Il resto della divisione per* 3 *di un numero qualunque è uguale al resto che si ottiene dividendo per* 3 *la somma delle sue cifre.*

Dim. Sia, ad es., il numero 97064. Sappiamo [148] che qualunque numero è uguale a un multiplo di 9, aumentato della somma delle sue cifre; è dunque:

$$97064 = \dot{9} + (9 + 7 + 6 + 4).$$

E perchè 3 divide 9, ogni multiplo di 9 è anche multiplo di 3. Possiamo scrivere pertanto:

$$97064 = \dot{3} + (9 + 7 + 6 + 4).$$

Ora vediamo che 3 divide una delle parti di una somma; quindi [138] la somma 97064 e l'altra parte $(9 + 7 + 6 + 4)$, divise per 3, danno resti eguali.

153. Cor. *Un numero è divisibile per* 3, *quando la somma delle sue cifre è divisibile per* 3.

Divisore 11.

154. Lemma. *Un numero qualunque è uguale ad un multiplo di* 11, *più il numero delle centinaia, più il numero rappresentato dalle due ultime cifre.*

Dim. Sia, ad es., il numero 48714. Essendo:

$$\begin{aligned} 48714 &= 48700 + 14 \\ \text{»} &= 487 \cdot 100 + 14 \\ \text{»} &= 487(99 + 1) + 14, \end{aligned}$$

egli è [74]:

$$48714 = 487 \cdot 99 + 487 + 14.$$

E perchè 99 è multiplo di 11, tale è [137] anche il prodotto $(487 \cdot 99)$. Possiamo quindi scrivere:

$$48714 = \dot{11} + 487 + 14,$$

e questa eguaglianza è conforme alla proposizione che si voleva dimostrare.

155. Teor. *Un numero qualunque è uguale ad un multiplo di* 11, *più la somma dei resti delle divisioni per* 11 *di quei numeri che si deducono dal dato separandone le cifre in coppie partendo da destra.*

Dim. Sia, ad es., il numero 7440976. Proveremo che esso è uguale ad un multiplo di 11, più la somma dei resti che si ottengono dividendo per 11 i numeri 7, 44, 9 e 76.

Applicando la proposizione precedente e rammentando che la somma di più multipli di uno stesso numero è anch'essa un multiplo di quel numero, abbiamo successivamente [33]:

$$7440976 = \dot{11} + 74409 + 76$$
$$» \quad = \dot{11} + 744 + 9 + 76$$
$$» \quad = \dot{11} + 7 + 44 + 9 + 76.$$

Ora, poichè un numero qualunque è uguale ad un multiplo di 11 più il resto della sua divisione per 11, abbiamo [136]:

$$7440976 = \dot{11} + 7 + 9 + 10,$$

epperò infine [33]:

$$7440976 = \dot{11} + (7 + 9 + 10), \text{ c. d. d.}$$

156. Cor. 1°. *Un numero, diviso per* 11, *dà lo stesso resto che si trova dividendo per* 11 *la somma dei resti delle divisioni per* 11 *di quei numeri che si ottengono dal proposto separandone le cifre in coppie partendo da destra.* [155, 138]. (*).

157. Cor. 2°. *Un numero è divisibile per* 11, *se è divisibile per* 11 *la somma dei resti delle divisioni per* 11 *di quei numeri che si deducono dal numero dato separandone le cifre in coppie partendo da destra.* [156].

Prove del 9 e dell'11.

158. La facilità, con cui si può ottenere il resto della divisione per 9 e per 11 di un numero qualunque, si può mettere a profitto per fare la prova di ciascuna delle quattro operazioni dell'Aritmetica.

(*) Il resto della divisione per 11 di un numero di due cifre si ottiene sottraendo dal numero quello prossimo inferiore composto di due cifre uguali.

Addizione. *Per fare la prova del 9 di un'addizione, si cercano i resti delle divisioni per 9 dei singoli addendi; la somma dei resti e la somma dei numeri dati, divise per 9, devono* [142] *dare resti eguali.*

Sottrazione. Poichè sommando il sottraendo e il resto si deve ottenere il minuendo:

Per fare la prova del 9 di una sottrazione, si cercano i resti delle divisioni per 9 del sottraendo e del resto; la somma dei resti e il minuendo, divisi per 9, devono dare resti eguali.

Moltiplicazione. *Per fare la prova del 9 della moltiplicazione di due o più numeri, si cercano i resti delle divisioni per 9 dei fattori; il prodotto dei resti e il prodotto trovato, divisi per 9, devono* [143] *dare resti eguali.*

Divisione. *Per fare la prova del 9 di una divisione, si cercano i resti delle divisioni per 9 del divisore, del quoziente e del resto. Aggiungendo quest'ultimo al prodotto degli altri due, e dividendo per 9 il risultato, si deve ottenere lo stesso resto, che dividendo per 9 il dividendo.*

Dim. Dividendo a per b siasi trovato q per quoziente ed r per resto. La divisione è esatta, se tra questi numeri sussiste la relazione:

$$a = b \cdot q + r.$$

Ed ora, prendendo anzitutto i resti delle divisioni per 9 dei due numeri $(b \cdot q)$ ed r, e dividendo la somma di questi resti per 9, si deve [142] trovare lo stesso resto, che dividendo per 9 il numero a. D'altra parte, per avere il resto della divisione per 9 del prodotto $(b \cdot q)$ basta [143] dividere per 9 i fattori, fare il prodotto dei resti, e dividere questo prodotto per 9. Resta così dimostrato che *ecc.*

Oss. Analoghe sono le prove dell' 11.

159. Oss. Abbiamo già detto che, quando facendo la prova d'una operazione si trova il numero atteso, è soltanto probabile che l'operazione sia stata fatta a dovere. Nella prova del 9, se l'errore nel risultato consista in trasposizione di cifre, ed in generale quando sia tale per cui non resti alterata la somma delle cifre o sia alterata d'un multiplo di 9, il resto della divisione per 9 non muta per questo [138]; epperò la prova del 9 non vale a scoprire errore di questa fatta.

Analogamente dicasi della prova dell'11.

Esercizi.

21. Può nua somma essere divisibile per uu numero, se una soltauto delle parti non è divisibile per questo numero?
22. Può una somma essere divisibile per un numero, non essendo tali alcune delle parti?
23. Due numeri non possono essere entrambi divisibili per nn terzo, che sia maggiore della loro differeuza. [139].
24. Due nnmeri, divisi per la loro differenza, dauno resti eguali. [138].
25. Se dne numeri divisi per un terzo danno resti eguali, la loro differenza è divisibile per questo terzo numero. (Sottraeudo dai dne numeri, il resto comnne, si ottengono numeri divisibili per il terzo. Poi [59, 139]...).
26. Se si agginnge o si sottrae uno stesso numero da due altri, che divisi per un terzo dauno resti eguali, anche i risultati, divisi per lo stesso divisore, dauno resti eguali. (Intanto [**25**] (*) la differenza dei due nnmeri dati è un multiplo del divisore. Poi [59]....).
27. Se due uumeri, che divisi per uu terzo danno resti eguali,

(*) Quando un numero di richiamo è stampato nello stesso carattere che si è adoperato per numerare gli esercizi, il richiamo si riferisce a precedente esercizio.

vengono moltiplicati per un numero qualunque, anche i prodotti, divisi per lo stesso divisore, devono dare resti eguali. [25, 10, 137, 138].

28. Quali numeri divisi per 5 danno per resto 8?

29. Quali sono i numeri composti unicamente con cifre uguali ad 1, o con cifre uguali a 2, o con cifre tutte uguali a 8, ecc., che sono divisibili per 9?

30. Quando due numeri sono composti con le medesime cifre, ma disposte in ordine differente, la loro differenza è un multiplo di 9. (Ogni numero è uguale a un multiplo di 9 aumentato della somma delle sue cifre, quindi [59, 139]...).

31. Separando un numero in classi, ciascuna di due cifre, partendo da destra, la somma delle classi e il numero dato, divisi per 11 (o per 99), danno resti uguali. (Ad es., $678143 = 67(9999 + 1) + 81(99 + 1) + 43$).

32. Separando le cifre componenti un numero in gruppi, in un modo qualunque, la somma dei numeri rappresentati dai singoli gruppi, e il numero dato, divisi per 9, danno resti eguali.

33. Per trovare il resto della divisione per 11 di un numero qualunque. si può dividere per 11 la somma delle cifre di posto pari, aumentata delle differenze tra 11 e le cifre di posto dispari (s'intende: contate da destra).

34. Se sette numeri, divisi per 7, danno resti differenti tra loro, la somma dei sette numeri è divisibile per 7.

35. Se cinque numeri, divisi per un multiplo di 5, danno resti tutti differenti tra loro e minori di 5. la somma dei numeri dati è divisibile per 5.

36. Se il prodotto di due numeri è pari, almeno uno dei fattori è pari. (Se i fattori fossero tutti e due dispari, dividendoli per 2..., [143].

37. Scrivendo consecutivamente dei numeri, ciascuno dei quali sia composto di tre cifre uguali, si ottiene un numero che è divisibile per 37.

CAPITOLO VII

NUMERI PRIMI

Definizioni.

160. Un numero, che è divisibile soltanto per se stesso e per l'unità, si dice *semplice o primo.*

Un numero, che ammetta divisori diversi da se stesso e dall'unità, si dice *composto,* od anche *non primo.*

Due numeri, i quali non abbiano altro divisore comune che l'unità, si dicono *primi tra loro.*

Oss. Due numeri possono essere primi tra loro, senza essere numeri primi (semplici). Due numeri primi sono necessariamente primi tra loro.

Teoremi relativi ai numeri primi.

161. Teor. *Ogni numero ammette almeno un divisore primo.*

Dim. Se il numero dato è primo, esso è divisibile per se stesso, epperò esso ammette un divisore primo.

Consideriamo un numero non primo; tale sia il numero n; dico che tra i suoi divisori se ne trova uno almeno, che è primo.

Poichè il numero n non è primo, esso avrà, oltre dell'unità e di se stesso, altri divisori, compresi necessariamente tra 1 ed n. Indichiamo con a il più piccolo di questi divisori; questo numero a è certamente un numero primo. Infatti, se non fosse primo, ci sarebbe un numero b, minore di a e diverso da *uno*, che dividerebbe a, e quindi [137] anche n, che è multiplo di a. Ma ciò non può essere, perchè (prescindendo dall' unità) il numero a è per ipotesi il minore dei divisori di n. Così resta dimostrato che *ecc.*

Oss. L' enunciato del teorema precedente suppone che l' *unità* non sia numero primo, laddove la definizione lo ammetterebbe tra i numeri primi. Non si vuol considerare l' *unità* come numero primo, perchè molti teoremi sui numeri primi non varrebbero se tra codesti ci fosse l' *unità*. (Un pretesto per escludere l' *unità* dai numeri primi può esser questo che ogni altro numero primo ha due divisori; e *l' unità* ne ha uno soltanto).

162. Cor. *Il minore dei divisori di un numero non primo è un numero primo.*

163. Teor. *Se due numeri non sono primi tra loro, essi hanno almeno un divisore primo comune.*

Dim. I due numeri a e b non siano primi tra loro. Dico che tra i loro divisori comuni ce n' è uno almeno che è primo.

Infatti, poichè a e b non sono primi tra loro, essi hanno, oltre dell' unità, qualche altro divisore comune; tale sia, ad es., il numero m. Questo divisore comune ammette almeno un divisore primo p, giacchè [161] ogni numero ha questa proprietà. E questo numero primo p, che divide m, divide poi anche [137] i numeri dati, che sono multipli di m. Resta così dimostrato che, *se ecc.*

164. Teor. *La serie dei numeri primi è illimitata.*

Dim. Ammettiamo che non ci siano altro che n

numeri primi, che rappresenteremo con le lettere a, b, $c \ldots h$. Imaginiamo di fare il prodotto di tutti questi numeri primi e di aggiungere poi l'unità. Se indichiamo con s la somma, possiamo scrivere:

$$a \cdot b \cdot c \ldots h + 1 = s.$$

È manifesto che il numero s non è divisibile per nessuno dei numeri primi $a, b \ldots, h$. Non è divisibile per a, perchè, essendo eguale a un multiplo di a aumentato di 1, diviso per a, dà per resto 1. Così, dividendo s per b, o per c, ecc., si trova sempre il resto 1. D'altra parte sappiamo [161] che ogni numero ammette almeno un divisore primo; dunque, oltre di a, b, c, ecc., deve esistere almeno un altro numero primo, il quale divida s.

Resta provato in questo modo che la serie dei numeri primi è illimitata.

165. Probl. *Costruire una tavola di numeri primi.*

Risol. Poichè la serie dei numeri primi è illimitata, volendo costruire una tavola di numeri primi, si è obbligati a prefiggersi un limite. Proponiamoci di costruire la tavola dei numeri primi inferiori a 1500.

Si scrivano intanto tutti i numeri consecutivi fino a 1500, col proposito di operare poi con una certa norma, per cui venga cancellato, o, se si vuole, segnato, ogni numero che non sia primo.

$\underline{1}$	2	3	$\underline{4}$	5	$\underline{6}$	7	$\underline{8}$	$\underline{9}$	$\underline{10}$
11	$\underline{12}$	13	$\underline{14}$	$\underline{15}$	$\underline{16}$	17	$\underline{18}$	19	$\underline{20}$
$\underline{21}$	$\underline{22}$	23	$\underline{24}$	$\underline{25}$	$\underline{26}$	$\underline{27}$	$\underline{28}$	29	$\underline{30}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	1499	$\underline{1500}$.

Tavola dei numeri primi inferiori a 1500.

	113	281	463	659	863	1069	1291
2	127	283	467	661	877	1087	1297
3	131	293	479	673	881	1091	1301
5	137	307	487	677	883	1093	1303
7	139	311	491	683	887	1097	1307
11	149	313	499	691	907	1103	1319
13	151	317	503	701	911	1109	1321
17	157	331	509	709	919	1117	1327
19	163	337	521	719	929	1123	1361
23	167	347	523	727	937	1129	1367
29	173	349	541	733	941	1151	1373
31	179	353	547	739	947	1153	1381
37	181	359	557	743	953	1163	1399
41	191	367	563	751	967	1171	1409
43	193	373	569	757	971	1181	1423
47	197	379	571	761	977	1187	1427
53	199	383	577	769	983	1193	1429
59	211	389	587	773	991	1201	1433
61	223	397	593	787	997	1213	1439
67	227	401	599	797	1009	1217	1447
71	229	409	601	809	1013	1223	1451
73	233	419	607	811	1019	1229	1453
79	239	421	613	821	1021	1231	1459
83	241	431	617	823	1031	1237	1471
89	251	433	619	827	1033	1249	1481
97	257	439	631	829	1039	1259	1483
101	263	443	641	839	1049	1277	1487
103	269	449	643	853	1051	1279	1489
107	271	457	647	857	1061	1283	1493
109	277	461	653	859	1063	1289	1499

Segniamo anzitutto l'unità, che non si vuol considerare come numero primo.

Segniamo i multipli di 2, fuori di questo numero.

Segniamo i multipli di 3, eccettuato questo numero. Di questi, taluni come ad es. 6 e 12, sono già segnati, perchè multipli di 2; ma a questa circostanza non occorre por mente.

Ora dovremmo segnare i multipli di 4; ma poichè 2 divide 4, esso 2 divide anche i multipli di questo numero. Dei multipli di 4 non occorre dunque occuparsi, perchè sono già segnati. Questa osservazione è generale, epperò possiamo dire: *i multipli di ogni numero, che sia stato segnato sono già segnati.*

Ora dobbiamo segnare i multipli di 5, fuori del 5. Codesti multipli potremmo trovarli nella schiera dei numeri, contando di cinque in cinque; ma possiamo conoscerli anche col moltiplicare 5 per i numeri successivi 2, 3, 4.... Questi multipli sono dunque rappresentati da:

$5 \cdot 2 \qquad 5 \cdot 3 \qquad 5 \cdot 4 \qquad 5 \cdot 5 \qquad 5 \cdot 6 \qquad$ ecc.

I tre primi di questi numeri sono anche multipli rispettivamente dei numeri 2, 3, 4, epperò sono già segnati. Il primo multiplo da considerare è quindi il prodotto $5 \cdot 5 = 25$, cioè il quadrato di 5.

Ora siamo al 6. Dacchè lo troviamo segnato, esso è multiplo di qualche numero minore, i cui multipli furono già segnati. Sono perciò ormai segnati anche i multipli di 6.

Dei multipli di 7, diversi da 7, il primo da segnare è 49, perchè i prodotti di 7 per numeri minori di 7 sono già segnati.

Possiamo anzi dire che tutti i numeri minori di 49, che a tal punto dell'operazione non sono segnati, sono primi. Infatti, un numero minore di 49, che non sia primo, è necessariamente il prodotto di due fattori, dei quali uno almeno è minore di 7. In altre parole un numero minore di 49, che non sia primo, è multiplo [125] di un numero minore di 7; epperò al punto in cui ci troviamo con l'operazione, esso è già segnato. Questa osservazione è generale; talchè si può dire: *quando l'operazione porta a segnare i multipli di un nuovo numero primo, a quel punto si è certi essere primi tutti i numeri della tavola che non sono segnati e che sono minori del quadrato del numero primo.*

Nel nostro caso, arrivati al 41, che ci portava a segnare il numero (41 · 41), numero maggiore di 1500, l'operazione fu compiuta.

166. Probl. *Riconoscere se un numero dato sia primo o no.*

Risol. Se il numero dato non supera il maggiore segnato nella tavola dei numeri primi che si possiede, dalla semplice ispezione della tavola si conosce se esso è primo o no.

Ma quando il numero dato superi il maggiore della tavola, allora bisogna dividerlo ordinatamente per i numeri primi ad esso inferiori. Se tutte queste divisioni danno resto, si può asserire che il dato numero è primo, dacchè si sa [161] che un numero che non sia primo ha almeno un divisore primo, il quale è naturalmente minore del numero dato.

Per risparmiare di queste divisioni, giova notare che allorquando, adoperando divisori sempre più grandi, si sia pervenuti ad uno col quale si sia trovato un quoziente minore del divisore, da quel punto non sono necessarie altre divisioni, e si può conchiudere che il numero dato è primo. Ad es., dividendo il numero 2221 per i numeri primi successivi, si ottengono costantemente dei resti, e giunti al divisore 53, si trova il quoziente 41, minore del divisore. A tal punto si può asserire che 2221 è primo, perchè, se esso fosse divisibile per un numero maggiore di 53, sarebbe divisibile [125] anche per il quoziente di questa divisione. Ma questo quoziente sarebbe minore di 41, e le prove fatte hanno ormai messo fuori di dubbio che il numero 2221 non è divisibile [161] per nessun numero che sia minore di 53.

Nel caso poi che il quoziente, che si ottiene dividendo per il maggiore dei numeri primi della tavola, sia maggiore del divisore, in questo caso bisogna dividere il numero proposto per i numeri susseguenti all' ultimo della tavola, tralasciando di adoperare quelli che per una ragione o per l'altra si conoscano non primi. [162]. E basterà seguitare, se le divisioni continuino a dar resti, fino a quella il cui quoziente è minore del divisore con cui fu effettuata.

Da quanto precede risulta che se il numero, dato da riconoscere se sia primo o no, sia un numero primo molto grande, oppure un numero composto, per il quale il minor divisore sia molto grande, l'operazione è laboriosissima.

167. Lemma. *Se due numeri sono entrambi minori di un numero primo, il loro prodotto non è divisibile per questo numero primo.*

Dim. Supponiamo che a e b siano due numeri minori entrambi di un numero primo p, e che il prodotto $(a \cdot b)$ sia divisibile per p. Ammettiamo inoltre che nessun numero minore di a, moltiplicato per b, dia un prodotto divisibile per p. Se mai ci fossero numeri minori di a, dotati di cotesta proprietà, per la dimostrazione si dovrebbe prendere, in luogo di a, il minore tra questi numeri.

Ciò posto, si divida p per a. (*). Chiamiamo q il quoziente ed r il resto della divisione. Il quoziente non può esser *zero,* perchè è $p > a$; e neanche il resto r non può esser *zero,* perchè p è un numero primo, e perciò non è divisibile per a, che è minore di p e diverso dall'unità. Il resto r è poi necessariamente minore del divisore a. Tra i numeri p, a, q ed r sussiste l'eguaglianza [106]:

$$p = a \cdot q + r.$$

Moltiplichiamo i due membri di questa eguaglianza per il numero b; otterremo prodotti eguali. Al momento poi di moltiplicare il secondo membro, dobbiamo rammentarci che, dovendo moltiplicare una somma per un numero, si può invece [73] moltiplicare le singole parti per il moltiplicatore e sommare i prodotti. Otteniamo così:

$$p \cdot b = a \cdot q \cdot b + r \cdot b,$$

e quindi anche [88]:

$$p \cdot b = (a \cdot b)\, q + r \cdot b.$$

Ora si osservi che il numero p divide [125] il primo membro $(p \cdot b)$; e divide il numero $(a \cdot b)\, q$, perchè, dividendo per ipotesi il prodotto $(a \cdot b)$, ne divide [137] anche il multiplo $(a \cdot b)\, q$. Ma quando un numero divide una somma ed una parte, esso divide [139] anche l'altra parte; quindi p divide il prodotto

(*) Con questa divisione si introduce nella dimostrazione l'ipotesi che p sia un numero primo; e s'introduce nella dimostrazione un numero minore di a, che serve infine a provare che la supposizione che il prodotto $(a \cdot b)$ sia divisibile per p è inammissibile.

$(r \cdot b)$. Ma, essendo $r < a$, ciò è contrario all'ipotesi che a sia il più piccolo numero il quale, moltiplicato per b, dà un prodotto divisibile per p.

Essendo caduti in contradizione, conchiudiamo che non può darsi che il prodotto $(a \cdot b)$ sia divisibile per p; e così resta provato che, *ecc.*

168. Teor. *Se un numero primo non divide nessuno dei fattori di un prodotto, esso non divide neanche il prodotto.*

Dim. 1°. Considereremo prima il caso che i fattori siano due soltanto. Questo caso si suddivide in tre, secondo cioè che ambidue i fattori sono minori del numero primo od ambidue sono maggiori, od uno solo è maggiore del numero primo e l'altro è minore.

Per il primo caso il teorema è già dimostrato, perchè si è fatto vedere [167] che il prodotto di due numeri entrambi minori di un numero primo non è divisibile per questo numero.

Siano a e b due numeri, maggiori entrambi del numero primo p, e nessuno di essi sia divisibile per questo numero. Dico che il prodotto $(a \cdot b)$ non è divisibile per p.

Si dividano a e b per p, e siano rispettivamente c e d i resti delle divisioni. Codesti resti sono entrambi minori di p, e sono diversi da *zero*, perchè per ipotesi a e b non sono divisibili per p.

Ora noi sappiamo [143] che, se due numeri si dividono per uno stesso divisore, il prodotto dei due numeri ed il prodotto dei resti, divisi per lo stesso divisore, danno resti eguali. Pertanto i due prodotti:

$$a \cdot b \quad \text{e} \quad c \cdot d,$$

divisi per p, danno resti eguali. Così, poichè il secondo prodotto, diviso per p, dà resto diverso da *zero* [167], altrettanto si può dire del prodotto $(a \cdot b)$. E ciò è quanto d. d.

Per il caso che uno solo dei numeri, ad es. il numero a, sia maggiore di p, il numero b si può riguardare come resto della divisione di b per p, ed allora, poichè i prodotti:

$$a \cdot b \quad \text{e} \quad c \cdot b,$$

divisi per p, danno resti eguali [143], ed il secondo non è [167] divisibile per p, neanche il prodotto $(a \cdot b)$ non è divisibile per p.

2°. È poi facilissimo estendere il teorema al caso di un prodotto di più di due fattori. Sia, ad es., il prodotto $(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f)$, e nessuno dei fattori sia divisibile per il numero primo p. Dico che neanche il prodotto non è divisibile per p.

Intanto per ciò che abbiamo appena dimostrato, il prodotto $(a \cdot b)$ non è divisibile per p. Ed ora, perchè p non divide, nè il numero $(a \cdot b)$, nè il numero c, esso non divide neanche il loro prodotto $(a \cdot b \cdot c)$. E perchè il numero primo p non divide, nè il numero $(a \cdot b \cdot c)$, nè il numero d, esso non divide neanche il loro prodotto $(a \cdot b \cdot c \cdot d)$. Ormai è palese che neanche il prodotto dato non è divisibile per p; epperò resta dimostrato che, *ecc.*

169. Cor. 1°. *Se un numero primo divide un prodotto, esso divide uno almeno dei fattori.*

Dim. Infatti, se il numero primo non dividesse nessuno dei fattori, esso non dividerebbe [168] neanche il prodotto.

170. Cor. 2°. *Un numero primo, che divide una potenza di un numero, divide anche questo numero.*

Dim. Infatti, poichè una potenza di un numero non è altro che un prodotto, i cui fattori sono tutti eguali a quel numero, e perchè un numero primo, che divide un prodotto, divide [169] almeno uno dei fattori, un numero primo, che divide una potenza, divide necessariamente anche la base.

171. Cor. 3°. *Se due numeri sono primi tra loro, due loro potenze sono anch' esse prime tra loro.*

Dim. Siano, ad es., i due numeri 13 e 20, che sono primi tra loro. Dico che due loro potenze, ad es. le due 13^4 e 20^7, sono anch' esse numeri primi tra loro.

Supponiamo che non siano tali; allora avranno un divisore primo comune p, dacchè si è provato [163] che, se due numeri non sono primi tra loro, essi hanno almeno un divisore primo comune. D' altra parte il numero primo p, che divide 13^4 e 20^7, divide anche 13 e 20, perchè [170] un numero primo, che divide una potenza, ne divide la base. Ma allora 13 e 20 sono primi tra loro ed hanno un divisore comune. Ciò è assurdo. Conchiudiamo che in fatto, *se ecc.*

172. Cor. 4°. *Un numero primo, che divide un prodotto di fattori primi, è uguale necessariamente ad uno dei fattori.*

Dim. Sappiamo [169] che un numero primo, che divide un prodotto, divide uno almeno dei fattori. Se questi sono numeri primi, il numero primo divide un fattore, che è primo. Ma in tal caso divisore e fattore sono eguali tra loro, perchè un numero primo non è divisibile che per se stesso e per l' unità.

Decomposizione di un numero in fattori primi.

173. Teor. *Ogni numero non primo è uguale ad un prodotto di fattori primi.*

Dim. Sia n un numero qualunque non primo. Dico che esso si può ottenere moltiplicando tra loro dei numeri primi.

Sappiamo [161] intanto che tra i divisori di n ce n'è uno almeno che è primo. Se indichiamo con p' questo numero primo che divide n, e con n' il quoziente della divisione, abbiamo:

$$n = p' \cdot n', \tag{1}$$

dimodochè possiamo dire in generale che *un numero non primo si può mettere sotto forma di prodotto di due fattori, dei quali uno almeno sia primo.*

Se il numero n' è primo, il numero n è già un prodotto di numeri primi. Supponiamo che n' sia un numero composto. Esso si può allora decomporre in due fattori p'' ed n'', il primo dei quali sia certamente primo. Così, essendo:

$$n' = p'' \cdot n'',$$

sostituendo nella (1), otteniamo:

$$n = p'(p'' \cdot n''), \qquad \text{ossia [90]:}$$
$$n = p' \cdot p'' \cdot n''.$$

Se n'' non è primo, si potrà decomporlo in due fattori, uno dei quali sia primo.

Così, continuando, si deve pervenire necessariamente ad un numero, per il quale tutti e due i fattori sono primi, perchè i quozienti successivi n', n'', n''', ecc. sono ciascuno minore del precedente, e per conseguenza la loro serie non può continuare senza fine. Quando si sia trovato un quoziente primo, l'operazione è compiuta, perchè si sono trovati dei numeri, tutti primi, che moltiplicati tra loro producono il numero dato.

Oss. La dimostrazione non suppone che i fattori primi siano tutti differenti tra loro. Il medesimo fattore può figurare più volte nel prodotto.

174. Teor. *Un numero non si può decomporre in fattori primi che in una sola maniera.*

Dim. Decomponendo un numero n in fattori primi, supponiamo che si sia trovato essere:

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13.$$

Proveremo che lo stesso numero n non si può decomporre in fattori primi in un altro modo; o in altre parole, che non può un altro gruppo di numeri primi dare ugualmente n per prodotto.

Supponiamo che dei numeri primi, che rappresenteremo con le lettere $a, b, c, d \ldots$, moltiplicati tra loro, diano n. Egli è per conseguenza:

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots$$

Come si vede, 2 è un divisore del primo membro; quindi esso divide anche il prodotto rappresentato dal secondo membro. Ma sappiamo [172] che, se un numero primo divide un prodotto di fattori primi, esso è uguale ad uno dei fattori. Dunque uno dei numeri, raffigurati dalle lettere $a, b, c, \ldots$, dev' essere uguale a 2. Supponiamo che sia $a = 2$. Dividendo i due membri per a, si trovano quozienti eguali; egli è [125] adunque:

$$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = b \cdot c \cdot d \ldots.$$

Nello stesso modo si prova che un altro dei fattori del secondo membro, ad es. b, è uguale ad uno dei fattori del primo membro; sia, ad es., eguale a 3. Sopprimendo [125] poi questo fattore comune, si ottiene:

$$3 \cdot 5 \cdot 13 = c \cdot d \ldots.$$

Così, seguitando, resteremo nel primo membro con un solo fattore, ad es. con 13. Poichè questo numero è primo, a quel punto nel secondo membro dovrà essere rimasto unicamente il numero 13.

Non esiste dunque che un modo unico di decomposizione di un numero in fattori primi.

175. Noi abbiamo soltanto fatto vedere la possibilità di decomporre un numero in fattori primi; ora si tratta di stabilire un processo per eseguire tale decomposizione.

Per fermare le idee, proponiamoci di decomporre in fattori primi il numero 25480.

Sappiamo [162] che il più piccolo dei divisori di un numero è un numero primo; è quindi naturale di provare successivamente i numeri primi 2, 3, 5 .... fino a che si sia trovato quello, che divide il numero dato esattamente. Sappiamo [166] che, se tutte le divisioni lasciano residuo, giunti a quella il cui quoziente è minore del corrispondente divisore, possiamo arrestarci e conchiudere che il dato numero è primo.

Nel nostro caso, il numero proposto è divisibile per 2; e poichè 12740 è il quoziente, si può scrivere:

$$25480 = 2 \cdot 12740.$$

Intanto vediamo che 2 è uno dei fattori richiesti; 12740 è il prodotto di tutti gli altri. La difficoltà è dunque ridotta a decomporre 12740. Anche questo numero è divisibile per 2; risultando 6370 per quoziente, si ha

$$12740 = 2 \cdot 6370.$$

Sostituendo, si ottiene:

$$25480 = 2\ (2 \cdot 6370), \qquad \text{ossia [90]:}$$

$$25480 = 2 \cdot 2 \cdot 6370.$$

Se 6370 fosse primo, l'operazione sarebbe compiuta; non essendo così, la difficoltà è ridotta a decomporre questo nuovo quoziente. Il processo è ormai palese. Seguitando si perviene ad un ultimo quoziente primo, e allora l'operazione è compiuta. Nel nostro caso l'ultimo quoziente è 13, e si ha:

$$25480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13.$$

L'operazione si dispone di solito come si vede qui a canto.

Nella colonna a sinistra sono scritti i successivi quozienti; a destra della linea stanno i successivi divisori primi.

25480	2
12740	2
6370	2
3185	5
637	7
91	7
13	13.

176. Oss. 1ª. Dappoichè in un prodotto ad alquanti fattori si può [88] sostituire il loro prodotto effettuato, l'ultima eguaglianza si può scrivere nel modo seguente:

$$25480 = (2 \cdot 2 \cdot 2)\ 5\ (7 \cdot 7)\ 13,$$

oppure [93]:

$$25480 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13.$$

(Veramente il numero 25480 così è decomposto in potenze di fattori primi, anzichè in fattori primi; ma così si riconosce anche più agevolmente quali e quanti siano questi fattori).

177. Oss. 2ª. È manifesto che ciascuno dei quozienti, che si calcolano quando si decompone un numero in fattori primi, è multiplo del quoziente successivo. Per conseguenza un numero, che non divida uno dei quozienti, non divide [137] neanche il quoziente che segue. Epperò quando, ad es., si sia riconosciuto che 13 è il minor numero primo che divide uno dei quozienti, allorchè si cercherà il minor numero primo che divide il quoziente che segue, si comincerà a provare il numero 13.

178. Oss. 3ª. È manifesto che, quando tra i fattori primi di un numero ce ne sia uno maggiore del più grande di quelli della tavola di numeri primi che si possiede, ed anche quando ce ne siano due, che pur non superando questo limite, siano piuttosto grandi, la decomposizione di quel numero in fattori primi è una operazione molto laboriosa. [166].

Metodo per trovare i divisori di un numero.

179. Teor. *Affinchè un numero divida un altro è necessario e sufficiente ch'esso sia composto con soli fattori primi del dividendo.*

Dim. Supponiamo che il numero m sia divisibile per n, e che sia q il quoziente; così è:

$$m = n \cdot q.$$

1°. Imaginiamo ora che tutti e tre i numeri m, n e q siano decomposti in fattori primi. Poichè, per moltiplicare per un prodotto, si può [90] moltiplicare successivamente per i singoli fattori, possiamo dire che il prodotto di tutti i fattori primi dati dalla decomposizione dei numeri n e q è uguale al prodotto dei fattori primi in cui è decomposto il numero m. E perchè un numero non si può [174] decomporre in fattori primi che in un modo soltanto, possiamo dire che tutti i fattori del divisore n si trovano tra quelli del dividendo m. Da ciò si conchiude che una condizione necessaria, perchè un numero divida un altro, è questa che il divisore sia composto con soli fattori primi del dividendo.

2°. Questa condizione è poi sufficiente. Siano infatti i numeri $m = (2^5 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11)$ ed $n = (2^3 \cdot 7^2)$, il secondo dei quali è composto con soli fattori primi dell'altro. Si tratta di provare che m è divisibile per n. A tale intento, fondandoci sul teorema che in un prodotto ad alquanti fattori si può sostituire il loro prodotto effettuato [88], separiamo da prima i fattori del dividendo in due gruppi, e in modo che uno di questi sia formato con gli stessi fattori del divisore. In questa guisa il dividendo assume l'aspetto:

$$m = (2^3 \cdot 7^2)(2^2 \cdot 3 \cdot 11).$$

Ed ora, poichè un fattore di m è uguale ad n, è palese [125] che la divisione del primo dei numeri dati per il secondo non dà nessun resto.

Oss. La condizione necessaria e sufficiente, perchè un numero sia divisibile per un altro, si può anche esprimere dicendo che: *Ogni fattore primo del divisore si deve trovare nel dividendo ripetuto almeno tante volte quante nel divisore*: od anche: *Perchè un numero sia divisibile per un altro, bisogna che esso contenga ogni fattore primo del divisore con esponente uguale o maggiore.*

180. Probl. *Trovare tutti i divisori di un numero dato.*

Risol. Sia dato, ad es., il numero 4200, e proponiamoci di trovare tutti i divisori di questo numero.

Decomponendolo intanto in fattori primi, si trova:

$$4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Sappiamo che un numero è divisore di 4200 soltanto se sia composto con fattori primi di questo numero; perciò la difficoltà si riduce a formare coi fattori primi del numero dato tutti i gruppi (prodotti) differenti possibili. Per formare tutti questi gruppi, senza ripeterne nè tralasciarne alcuno, scriviamo intanto la tabella qui a canto. (Non occorre spendere parole per fare conoscere con quale norma sia stata composta).

1	2	2^2	2^3
1	3		
1	5	5^2	
1	7		

Ciò fatto, si moltiplichino tutti i numeri della prima riga trasversale per ciascuno dei numeri della seconda; si ottengono con ciò i prodotti:

$$1,\quad 2,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad 3,\quad 2 \cdot 3,\quad 2^2 \cdot 3,\quad 2^3 \cdot 3.$$

Ed ora moltiplicheremo tutti questi prodotti per ciascuno dei numeri della terza riga; e poi tutti i nuovi prodotti per ciascuno dei numeri della quarta riga. Gli ultimi prodotti sono *tutti* i divisori del numero dato.

Affine di persuaderci di questo osserviamo che:

1°. Tutti i prodotti così ricavati sono divisori del numero dato, perchè [179, 1°] sono composti con più o meno de' suoi fattori primi.

2°. Tutti questi prodotti sono differenti. Infatti, quando nel formarli si muta il solo moltiplicando, in quel caso si ottengono naturalmente risultati disuguali. Quando poi si ripiglia a moltiplicare gli stessi numeri per un nuovo moltiplicatore, allora si ottengono, prodotti necessariamente diversi dai precedenti perchè il moltiplicatore introduce nei prodotti un nuovo fattore primo. [174].

3°. Resta a provare che nel modo indicato si ottengono veramente *tutti* i divisori del numero proposto. A tale intento formiamo un suo divisore arbitrariamente, prendendo più o meno de'suoi fattori primi; ad es. si consideri il divisore $(2 \cdot 5^2 \cdot 7)$. Codesto divisore si trova necessariamente tra quelli ottenuti col processo adoperato. Intanto, tra i prodotti avuti adoperando i numeri delle due prime righe c'è il 2; e per l'appunto lo si è ottenuto moltiplicando il secondo numero della prima riga per il primo della seconda. Più tardi, quando si moltiplicarono i prodotti, or ora accennati, per i singoli numeri della terza riga, tra gli altri risultò il prodotto $(2 \cdot 5^2)$. Finalmente, quando si moltiplicarono i nuovi prodotti per i numeri dell'ultima fila, si trovò anche il divisore $(2 \cdot 5^2 \cdot 7)$.

Resta così dimostrata la seguente:

Regola. *Per formare tutti i divisori di un numero, lo si decompone in fattori primi, e si scrive una tabella di numeri composta di tante linee trasversali, quanti sono i fattori primi differenti. A ciascun fattore primo corrisponde una riga, e questa comincia con l'unità, che è poi seguita dalle potenze successive del fattore primo, fino a quella che figura nel numero proposto. Quindi si moltiplicano tutti i numeri della prima riga per tutti quelli della seconda, poi i risultati si moltiplicano per i singoli numeri della terza riga, e così di seguito, fino ad avere adoperata l'ultima riga della tavola. Gli ultimi prodotti sono i divisori del numero dato.*

Massimo comun divisore.

181. Alquanti numeri dati possono avere parecchi divisori comuni; il più grande di questi si dice il *massimo comun divisore* di quei numeri.

È molto facile trovare il massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri dati, se questi siano decomposti in fattori primi.

Basta infatti riflettere che ogni divisore di un numero è composto [179] con fattori primi di questo numero, per comprendere che un divisore comune di parecchi numeri dev' essere composto con fattori primi comuni a questi numeri, e che nessun fattore può avere esponente maggiore di quello da cui è affetto nel numero, dove si trova con esponente minore. Da queste considerazioni emerge la:

Regola. *Si forma il massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri, facendo il prodotto dei loro fattori primi comuni, prendendo ciascun fattore con esponente uguale a quello, ch' esso porta nel numero, in cui è affetto da esponente minore.*

Es. Siano i numeri (già decomposti in fattori primi):

$$2^3 \cdot 5^2 \cdot 11, \qquad 2^2 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 29, \qquad 2^4 \cdot 5 \cdot 29.$$

I soli fattori primi comuni sono 2 e 5. Il primo ha 2 per minore esponente, l' altro l' unità. Secondo la regola precedente il massimo comune divisore è:

$$2^2 \cdot 5 = 20.$$

Che realmente siasi ottenuto in tal modo il massimo comun divisore, lo si argomenta da ciò che, qualora il fattore 2 si fosse preso con esponente maggiore, il numero risultante non sarebbe stato un divisore [179] del secondo dei numeri dati. Quando si fosse preso maggiore l'esponente di 5, si fosse preso, ad es., $(2^2 \cdot 5^2)$, il numero ottenuto non sarebbe stato un divisore del terzo dei numeri dati. Ove si fosse preso il fattore 11, il numero non sarebbe stato un divisore del terzo; ecc. E se si introducesse un numero primo, diverso da quelli che dividono l'uno o l'altro dei numeri dati, il numero che si otterrebbe non dividerebbe nessuno dei numeri dati. Dunque $(2^2 \cdot 5)$ è veramente il massimo comune divisore richiesto.

Minimo comune multiplo.

182. Moltiplicando quanti si vogliano numeri tra di loro, si ha nel prodotto un loro multiplo comune; e in generale si dice *multiplo comune* di parecchi numeri dati ogni numero divisibile per ciascuno di essi.

E perchè, se un numero è divisibile per parecchi altri, questi dividono [125] anche ogni multiplo del primo, la serie dei multipli comuni di alquanti numeri è illimitata. Fra tutti questi multipli ve n'ha naturalmente uno di più piccolo, che si dice *minimo comune multiplo* dei numeri dati; ora si tratta di stabilire un processo per determinarlo.

Prendiamo, per fermare le idee, i seguenti numeri, già decomposti in fattori primi, :

$$2^3 \cdot 3 \cdot 11, \qquad 2 \cdot 3^2 \cdot 7, \qquad 3 \cdot 7^2 \cdot 13^5.$$

Poichè questi numeri devono essere divisori del numero che si ricerca, essi devono [179] essere composti con più o meno fattori primi di questo numero. Volendo ch' esso riesca il più piccolo possibile, lo formeremo operando come indica la seguente:

Regola. *Per formare il minimo comune multiplo* *di quanti si vogliano numeri decomposti in fattori primi, si fa il prodotto di tutti i fattori differenti, attribuendo a ciascun fattore l' esponente maggiore da cui è affetto nei numeri dati.*

Nel caso nostro il minimo comune multiplo deve essere:

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^5,$$

ed è facile persuadersi. Infatti, qualora si fosse ommesso, ad es., il fattore 11, esso non sarebbe riuscito multiplo del primo dei numeri dati. Se al fattore 2 avessimo dato un esponente minore di 3, non avremmo ottenuto un multiplo del primo numero; e così via.

183. Oss. Dal lato teorico le regole, che abbiamo trovate per la determinazione del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo di quanti si vogliano numeri dati, nulla lasciano a desiderare. Non si può dire altrettanto relativamente alla semplicità dei calcoli, perchè la decomposizione di un numero in fattori primi può essere una operazione estremamente laboriosa. [178]. Nel capitolo seguente vedremo altre regole per calcolare il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo, e queste indipendenti dalla decomposizione in fattori primi.

Esercizi.

38. Un numero primo è primo con ogni altro che non sia suo multiplo. (Se di due nnmeri uno è primo, quali sono i divisori comnni possibili? Ecc.).

39. Dne numeri consecutivi sono primi tra loro. (La loro differenza è l'unità. [139]).

40. Dne numeri dispari consecutivi sono primi tra loro.

41. Qualunqne divisore di nn numero è primo col numero successivo.

42. Se la somma di due numeri è un numero primo, i due numeri sono primi tra loro. [136].

43. Se due numeri sono primi tra loro, sono primi anche con la loro somma e con la loro differenza.

44. La somma e la differenza di due potenze di due numeri primi tra loro sono primo con ciascuno di questi due numeri.

45. Se la differenza di due numeri è un numero primo, essi sono o multipli di questo numero, o primi tra loro.

46. Se un numero p divide il numero che si ottiene aggiungendo l'unità al prodotto di tutti i numeri minori di p., quel numero è primo. (Ad es., 7 divide il numero $2 \cdot 3 \quad 4 \cdot 5 \quad 6 + 1$; perciò 7 è primo. Infatti, ove 7 non fosse primo, uno dei numeri 2, 3... 6 dovrebbe dividere 7, e quindi anche il suo multiplo $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1$,... [139]).

47. Ogni numero non divisibile per 3 è uguale a un multiplo di 3 aumentato o diminuito di una unità.

48. Ogni numero dispari è uguale a un multiplo di 4 aumentato o diminuito di una unità.

49. Ogni numero primo, che sia maggiore di 3, è uguale a un multiplo di 6, aumentato o diminuito di una unità.

50. Dati due numeri decomposti in fattori primi, come si riconosce se essi sono primi tra loro? [179].

51. Quale condizione deve sodisfare un numero, affinchè sia primo con 1000? e in generale con un numero scritto con l'unità e zeri? (Quali sono i divisori primi di ogni numero così fatto?).

52. Scritti i primi 1000 numeri, quali bisogna cancellare, affinchè rimangono quelli che sono primi con 1000? Quanti sono adunque i numeri da 1 a 1000, primi con 1000?

53. Quando due numeri sono primi con 10, la somma od altrimenti la differenza dei loro quadrati è divisibile per 10. (Quale può essere la cifra delle unità di un numero primo con 10? Con quale cifra può terminare allora il quadrato di questo numero?).

54. Dimostrare che un numero, che sia primo con tutti i fattori di un prodotto, è primo altresì col prodotto. (Ammettendo che il numero dato e il prodotto non siano primi tra loro, bisogna ammettere... [163]. Ma un numero primo... [169]. Ma allora il numero dato ed uno dei fattori avrebbero un divisore...).

55. Dimostrare che, se un numero è primo con un prodotto, esso è primo altresì con ciascuno dei fattori. (Ammettendo che il numero ed un fattore non siano primi tra loro, si trova che il loro divisore comune dovrebbe dividere [137] anche il prodotto. Ma allora il numero dato ed il prodotto non sarebbero...).

56. Se due numeri sono primi tra loro, la loro somma e il loro prodotto sono pure primi tra loro; e così la loro differenza ed il prodotto.

57. Dalla regola 180 si deduca quella per determinare *a priori* il numero dei divisori di un numero dato, supponendo che codesto numero sia decomposto in fattori primi.

58. Si trovino i divisori dei numeri 360, 504, 4620, 17640, 16632.

59. Determinare *a priori* il numero dei divisori dei numeri del precedente esercizio.

60. Riconoscere che i numeri 28, 496, 8128 sono *perfetti*. (Un numero è detto *perfetto*, quando è uguale alla somma di tutti i suoi divisori, escluso da questi il numero stesso).

61. Riconoscere che i due numeri 284 e 220 sono *amicabili*, che ciascuno, cioè, è uguale alla somma dei divisori dell'altro.

62. Trovare i divisori di 42^3. (Si badi al teor. 170).

63. Trovare il più piccolo numero che ha 11 divisori, ed il più piccolo che ammette 12 divisori. (Si sa che il numero dei divisori si ottiene... [57]. Si decomporrà in fattori il numero dei divisori, che deve avere il dato numero; poi diminuendo di una unità ciascuno dei fattori, si ottengono gli esponenti. Resta a scegliere i fattori primi (le basi) in modo che il numero risultante sia il più piccolo possibile).

64. Trovare il più piccolo numero che ha 81 divisori.

65. Quale è la condizione perchè il numero dei divisori di un numero sia dispari?

66. Trovare il più piccolo numero che è divisibile per 16, e che ha 20 divisori.

67. Dimostrare che, se i divisori di un numero sono schierati in ordine di grandezza, cominciando con l'unità e terminando col numero stesso, il prodotto di due divisori equidistanti dagli estremi è uguale al numero dato. (Basta osservare che, dividendo un numero dato per un suo divisore, si ha per quoziente un altro divisore). Ma dacchè i divisori sono così coningati, come è che il loro numero può essere dispari?

68. Dimostrare che ogni divisore comune di alqnanti numeri divide il loro massimo comun divisoro, e che ogni loro multiplo comnne è multiplo del loro minimo comuno multiplo.

69. Dimostrare che il massimo comun divisore di due numeri non muta, se si divide uno dei due numeri per un suo divisore che sia primo con l'altro numero. (Si può fondarsi sui teoremi 179, 174).

70. Dimostrare che il minimo comune multiplo di due numeri è ugnale al loro prodotto diviso per il loro massimo comun divisore. (Si osserverà che il minino comune mulplo è composto coi fattori primi rimasti dalla composizione del massimo divisore comune).

71. So un nnmero a non è divisibile per un numero primo p, i multipli successivi di a, fino a quello ottenuto col moltiplicatore $p - 1$, divisi per p, danno resti disuguali. (Snpponiamo che dne dei multipli, ad es. i due $a \cdot 15$ ed $a \cdot 9$, diano resti ugnali. Sottraendo dai due multipli il resto, si hanno risultati divisibili per p, e la loro differenza (che è poi nel tempo stesso [59] la differenza tra $a \cdot 15$ ed $a \cdot 9$) è [139] anch'essa divisibile per p. La differenza dei due mnltipli di a è poi il prodotto di a per un nnmero minore di p, e poichè p è primo e non divide a, nè l'altro fattore, esso non può [168] neanche dividere il prodotto. Ecc.).

CAPITOLO VIII

MASSIMO COMUN DIVISORE MINIMO COMUNE MULTIPLO

Metodo, detto delle divisioni successive, per la determinazione del massimo comun divisore.

La ricerca del massimo comun divisore di due numeri si può fondare sui teoremi seguenti.

184. Teor. *Se il maggiore di due numeri è divisibile per l'altro, il massimo comun divisore dei due numeri è uguale al minore.*

Dim. Siano dati due numeri a, b, e il primo sia divisibile per il secondo. Dico esser b il loro massimo comun divisore.

Infatti b è intanto un *divisore comune*, perchè, oltre che dividere a, divide se stesso. È poi il *massimo* comun divisore, perchè un numero maggiore di b non può esser divisore di b, e quindi neanche un divisore comune dei numeri dati.

185. Teor. *Se il maggiore di due numeri non è divisibile per l'altro, i due numeri hanno lo stesso massimo comun divisore che il minore di essi e il resto della loro divisione.*

Dim. Siano a e b due numeri dati; sia a il maggiore; e sia c il resto della divisione di a per b. Dico che il massimo comun divisore di a e b è ad un tempo il massimo comun divisore dei numeri b e c.

$$a, \quad b. \qquad\qquad b, \quad c.$$

Indichiamo con m il massimo comun divisore di a e b. Intanto il numero m, poichè divide a e b, cioè il dividendo e il divisore d'una divisione, divide [140] anche il resto c. Il numero m è dunque *un divisore comune* dei numeri b e c. Ma esso è anche il *massimo* divisore comune di questi numeri, giacchè nessun numero n, maggiore di m, potrebbe dividere ad un tempo b e c. Infatti, se n dividesse questi numeri, allora, poichè dividerebbe il divisore e il resto d'una divisione, esso dividerebbe [141] anche il dividendo a; e così i numeri a e b avrebbero un divisore comune n maggiore del loro massimo comun divisore; il che è assurdo. Resta dunque provato che, *se ecc.*

186. Proponiamoci ora di determinare il massimo comun divisore di due numeri, ad es. quello di 7524 e 918.

Avendo presente il teorema: Se il minore di due numeri divide l'altro, esso è il massimo comun divisore dei due numeri dati [184], ci troviamo indotti a dividere 7524 per 918, pensando che, se mai la divisione riesce senza residuo, in tal caso il massimo comun divisore, che si cerca, è lo stesso 918. Ma, effettuando la divisione, si trova il resto 180. L'operazione ha fatto capire non essere 918 il numero richiesto; però possiamo profittare del resto 180, giacchè si sa [185] che il massimo comun divisore di due numeri coincide con quello del minore dei due e del resto della loro divisione. La questione non è mutata; ma invece di dover operare coi due numeri 7524 e 918, si ha da risolvere la questione stessa sui numeri 918 e 180. In luogo del maggiore dei due dati è subentrato nell'operazione un numero più piccolo del minore.

Dacchè la difficoltà è ridotta alla ricerca del massimo comun divisore dei due numeri 918 e 180, divideremo il primo per il secondo, pensando da capo che, se la divisione riuscirà esattamente, essa varrà a provarci che 180 è il numero che si cerca; laddove, se la divisione finirà con resto, se ne potrà trar profitto. Avviene per l'appunto il secondo caso; 18 è il resto della divisione. Così il problema è ridotto alla ricerca del massimo comun divisore dei due numeri 180 e 18.

Seguitando con questo processo, si deve pervenire necessariamente a una divisione il cui resto sia *zero*, perchè ciascuno dei resti è minore del precedente, e per conseguenza la serie dei resti non può seguitare senza fine. Il divisore dell'ultima divisione è il massimo comun divisore dei numeri dati. [184].

Da queste considerazioni si ricava la:

Regola. *Per determinare il massimo comun divisore di due numeri, si divide il maggiore per il minore, poi il minore per il resto della divisione, e così si continua a dividere ciascun divisore per il resto corrispondente, sino a che si trovi un resto che divida esattamente quello che lo precede. Questo ultimo resto è il massimo comun divisore dei due numeri dati.*

L'operazione si suol disporre come si vede nella

	2	3	1	2	2
8496	3744	1008	720	288	144
7488	3024	720	576	288	
1008	720	288	144	0	

annessa tabella, formata cercando il massimo comun divisore dei numeri 8496 e 3744.

Si è diviso 8496 per 3744. Il quoziente 2 si è scritto sopra del divisore, e il resto 1008 fu poi scritto nuovamente a destra del divisore.

Dividendo 3744 per 1008, si è trovato 3 per quoziente, e il resto 720 fu poi scritto a destra del divisore. Così, seguitando, si pervenne alla divisione di 288 per 144. Poichè questa non ha dato resto, si è conchiuso che 144 è il massimo comun divisore dei numeri 8496 e 3744.

Teoremi relativi al massimo comun divisore.

187. Teor. *Ogni divisore comune di due numeri divide il loro massimo comun divisore.*

Dim. Supponiamo che, applicando il metodo delle divisioni successive per la determinazione del massimo comun divisore di due numeri a e b, si siano trovati successivamente i resti c, d, e, f. L'ultimo resto f è il massimo comun divisore dei numeri a e b. Dico che un numero m, che divida a e b, divide anche il loro massimo comun divisore f.

A tal fine si scriva la tabella seguente, dove si vedono in una stessa riga dividendo, divisore e resto di ciascuna divisione.

Dividendi	Divisori	Resti
a	b	c
b	c	d
c	d	e
d	e	f
e	f	—

Poi si osservi che il numero m, poichè divide a e b, divide anche c, appunto perchè [140] ogni numero, che divide dividendo e divisore, divide anche il resto della divisione.

Ma poichè m divide b e c, esso divide [140] anche d, resto della loro divisione.

Così, continuando, si arriva a conchiudere che il numero m divide anche f; per l'appunto c. d. d.

188. Oss. L'inverso del teorema or ora dimostrato è questo: *un numero, che divide il massimo comun divisore di due altri, divide anche questi numeri.* Questi ultimi infatti sono multipli del loro massimo comun divisore, e si sa [137] che un numero, che divide un altro, ne divide ogni multiplo.

189. Teor. *Moltiplicando due numeri per un terzo, il loro massimo comun divisore viene moltiplicato per questo terzo numero.*

Dim. Supponiamo che, applicando il metodo delle successive divisioni per la determinazione del massimo comun divisore di due numeri a e b, si siano trovati successivamente i resti c, d, e, f. L'ultimo resto f è il massimo comun divisore. Ora si tratta di dimostrare che, se si moltiplicano i due numeri a e b per un terzo m qualunque, il massimo comun divisore dei prodotti $(a \cdot m)$ e $(b \cdot m)$ è il prodotto $(f \cdot m)$. (*).

Dividendi,	divisori,	resti.	Dividendi,	divisori,	resti.
a	b	c	am	bm	cm
b	c	d	bm	cm	dm
c	d	e	cm	dm	em
d	e	f	dm	em	fm
e	f	—	em	fm	—

(*) Il prodotto di numeri, rappresentati da lettere, si indica ordinariamente scrivendo le lettere una dopo l'altra, omettendo il punto, segno di moltiplicazione. E così faremo anche noi d'ora in avanti.

Imaginando di voler determinare il massimo comun divisore dei prodotti $a m$ e $b m$ mediante il metodo delle divisioni successive, dobbiamo anzitutto dividere $a m$ per $b m$. Ma poichè, dividendo a per b, si è trovato per resto c, la divisione di $a m$ per $b m$ darà per resto $c m$ [124]. Similmente si riconosce che i resti successivi sono $d m$, $e m$, $f m$. Ed $f m$ è l'ultimo resto. Infatti, poichè dividendo e per f si è trovato per resto *zero*, dividendo $e m$ per $f m$, si deve [124] trovare per resto $(0 \cdot m)$, cioè *zero*. Adunque $f m$ è il massimo comun divisore dei prodotti $a m$, $b m$; per l'appunto c. d. d.

190. Teor. *Dividendo due numeri per un loro divisore comune, il massimo comun divisore viene anch' esso diviso per lo stesso numero.*

Dim. I due numeri a, b siano divisibili per d. Sappiamo [187] che anche il loro massimo comun divisore m è divisibile per d. Indichiamo rispettivamente con p, q ed n i quozienti delle divisioni di a, b ed m per d. Si deve provare che il massimo comun divisore dei numeri p e q è il numero n.

Infatti, poichè moltiplicando p e q per d si ottengono i numeri a e b, il massimo comun divisore dei numeri p e q deve essere [189] tal numero che, moltiplicato per d, dia per prodotto m. Ma il numero, che gode tale proprietà, è appunto n, perchè esso è il quoziente della divisione esatta di m per d. Così resta provato che, *ecc.*

a,	b,	m.
p,	q,	n.

191. Cor. *Dividendo due numeri per il loro massimo comun divisore, si ottengono quozienti che sono primi tra loro.*

Dim. Infatti, se si dividono due numeri a e b per il loro massimo comun divisore m, si ottengono due quozienti, il cui massimo comun divisore è [190] il quoziente di m per m, cioè l'unità. I due quozienti sono dunque primi tra loro, c. d. d.

192. Teor. *Un numero, che divide il prodotto di due altri ed è primo con uno dei fattori, divide necessariamente l' altro fattore.*

Dim. Il numero m divida il prodotto $a b$ e sia primo con a. Proveremo che m divide necessariamente l'altro fattore b.

Intanto, poichè a ed m sono primi tra loro, l'unico e quindi anche il massimo loro divisore comune è l'unità. Se moltiplichiamo questi due numeri per b (che è il secondo fattore del prodotto dato), i due prodotti $a b$ ed $m b$ hanno $(1 \cdot b)$, cioè b, per massimo comun divisore; e ciò per il teorema: quando due numeri vengono moltiplicati per un terzo, anche il loro massimo comun divisore viene moltiplicato per questo terzo numero. [189].

$$\begin{array}{ccc} a & & m \\ & 1 & \\ a b & & m b \\ & 1 \cdot b & \end{array}$$

Osserviamo ora che il numero m divide i due prodotti $a b$ ed $m b$; il primo per ipotesi, il secondo manifestamente. [125]. Ma quando un numero divide due altri, esso divide [187] anche il loro massimo comun divisore; perciò m divide b, come d. d. (*).

(*) Se il numero m, che divide il prodotto $a b$, è primo, allora esso, o divide il primo fattore, od altrimenti è primo con questo, e in questo caso esso divide necessariamente [192] l'altro fattore. Il teorema 169 è dunque un caso particolare del teorema fondamentale 192. Così, dappoichè tutte le proposizioni del presente capitolo furono dimostrate indipendentemente da quelle del capitolo che precede, possiamo dire che la teoria dei numeri primi, invece che sul teorema d' Euclide di-

193. Teor. *Se un numero è divisibile per due altri, che siano primi tra loro, esso è anche divisibile per il prodotto di questi numeri.*

Dim. Il numero n sia divisibile per a e per b; e questi numeri siano primi tra loro. Dico che n è divisibile per il prodotto $a\,b$.

Intanto, chiamando p il quoziente della divisione di n per a, si può scrivere:

$$n = a\,p.$$

Ora, poichè b divide n, cioè il prodotto $a\,p$, ed è primo con a, esso divide [192] l'altro fattore p. Detto q il quoziente della divisione di p per b, possiamo scrivere: $$p = b\,q.$$

Sostituendo questo valore di p nel valore di n, otteniamo [90]:

$$n = a\,b\,q, \qquad \text{ossia [88]:}$$
$$n = (a\,b)\,q.$$

Così è reso manifesto che n è divisibile [125] per il prodotto $a\,b$, come d. d.

194. Teor. *Un numero divisibile per parecchi altri, primi tra loro a due a due, è divisibile anche per il prodotto di questi numeri.*

Dim. Il numero n sia divisibile per parecchi numeri $a, b, c, d\ldots$, i quali siano primi tra loro a due a due. Dico che n è divisibile per il prodotto $a\,b\,c\,d\ldots$

Detto p il quoziente della divisione di n per a, possiamo scrivere: $$n = a\,p. \qquad (1)$$

mostrato nei §§ 167 e 168, avremmo potuto fondarla sull'algoritmo [186], che serve a determinare il massimo comun divisore.

Ben guardando però si può riconoscere che i due metodi non differiscono sostanzialmente; e valga per prova questo che, imitando la dimostrazione del § 167, si può dimostrare il teorema del § 192.

Ora, perchè b divide n, cioè il prodotto $a\,p$, ed è primo con a, esso divide [192] il fattore p. Detto q il quoziento della divisione, possiamo scrivere:

$$p = b\,q. \tag{2}$$

E perchè c divide n, cioè il prodotto $a\,p$, od è primo con a, osso [192] divide p, cioè il prodotto $b\,q$. Ma ò primo con b; quindi [192] divido q. Dotto r il quoziente della divisiono, possiamo scrivere:

$$q = c\,r. \tag{3}$$

Nello stesso modo, fondandosi successivamente sulle uguaglianze (1), (2) o (3), si prova che r è divisibile per d. Detto s il quoziente, si può scrivere:

$$r = d\,s. \tag{4}$$

Supposto cho non ci siano altri divisori di n, sostituendo nella (1) il valoro di p dato dalla (2), e nell'eguaglianza risultante sostituendo a q il valoro dato dalla (3), e infine il valoro di r, dato dalla (4), si ottiene [90]:

$$n = a\,b\,c\,d\,s, \qquad \text{ossia [88]:}$$
$$n = (a\,b\,c\,d)\,s.$$

Così è reso manifesto cho n è divisibilo [125] per il prodotto $a\,b\,c\,d$; ed è dimostrato in generale che, *ecc.*

Metodo per trovare il massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri.

La ricerca del massimo comun divisore di più di due numeri si può fondare sul seguente:

195. Teor. *Il massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri è ad un tempo il massimo comun divisore dei numeri del sistema, che si ottiene da quello dei numeri dati, surrogandone due qualunque col loro massimo comun divisore.*

Dim. Siano, ad es., i numeri:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e. \qquad \text{(A)}$$

Presine due qualunque, ad es. i due a e b, se ne determini il massimo comun divisore. Indichiamolo con m. Ora proveremo che il massimo comun divisore dei cinque numeri dati è eziandio il massimo comun divisore dei quattro numeri:

$$m,\ c,\ d,\ e. \qquad \text{(B)}$$

Intanto il massimo comun divisore dei numeri (A), che indicheremo con n, è un *divisore comune* dei numeri (B), perchè, dividendo i due numeri a e b, esso divide [187] il loro massimo comun divisore m. Ma esso è anche il *massimo* divisore comune dei numeri (B), perchè, se un numero r, maggiore di n, li dividesse tutti, esso, come divisore di m, sarebbe [187] anche divisore comune di a e b, e quindi dei numeri (A), i quali così avrebbero un divisore comune r, maggiore del loro massimo comun divisore n. E ciò è assurdo.

Così si è provato che *ecc.*

196. Per il teorema che precede, la ricerca del massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri si fa dipendere da quella di due numeri soli. Ad es., dovendo determinare il massimo comun divisore dei cinque numeri a, b, c, d, e, si comincerà a determinare il massimo comun divisore di due qualunque di essi. Scelti, ad es., i due a e b, e posto che sia m il loro massimo comun divisore, la questione è ridotta alla ricerca del massimo comun divisore dei quattro numeri m, c, d, e. Così, se n è il massimo comun divisore dei numeri c, d;

$$\begin{array}{l}
a\quad b\quad c\quad d\quad e \\
\underbrace{\ \ }_{}\ \ \\
m\quad c\quad d\quad e \\
m\quad n\quad e \\
p\quad e \\
q
\end{array}$$

se p è quello dei due m ed n; se q è quello dei numeri p ed e, codesto numero q è il massimo comun divisore dei cinque numeri dati.

Ora possiamo enunciare la:

Regola. *Per trovare il massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri, si cerca dapprima il massimo comun divisore di due qualunque di questi numeri, e lo scrive in loro vece. Così si passa ad un sistema, che contiene un numero di meno che il primitivo. Quindi, presi ad arbitrio due numeri del nuovo sistema, si cerca il loro massimo divisore comune, e lo si scrive in loro vece. Così, continuando, si perviene ad un sistema composto di due numeri soltanto. Il massimo comun divisore di questi ultimi è il massimo comun divisore dei numeri dati.*

197. Oss. Nel caso che tra i numeri, dei quali è domandato il massimo comun divisore, uno sia *multiplo* di un altro, esso si può trascurare senza più. Infatti, se si comincia l'operazione con questi due numeri, si trova [184] da mettere al loro posto per l'appunto il minore dei due.

Perciò, ad es., dovendosi determinare il massimo comun divisore dei numeri 75, 24, 36, 240, 360, si può prescindere dai due ultimi, che si riconoscono multipli di due antecedenti; basta quindi procedere alla ricerca del massimo comun divisore di 75, 24 e 36.

Minimo comune multiplo di due numeri.

Conoscendo il massimo comun divisore di due numeri, si può trovarne immediatamente il minimo comune multiplo; il modo lo indica il seguente:

198. Teor. *Il minimo comune multiplo di due* *numeri è eguale al prodotto che si ottiene moltiplicando uno di essi per il quoziente della divisione dell' altro per il loro massimo comun divisore.*

Dim. Siano a e b due numeri qualunque ed m il loro massimo comun divisore. Se indichiamo con p e q i quozienti delle divisioni di a e b per m, abbiamo:

$$a = mp,$$
$$b = mq.$$

Moltiplicando i due membri della prima eguaglianza per q, e quelli della seconda per p, otteniamo:

$$aq = mpq,$$
$$bp = mqp,$$

donde si conchiude [87] che è:

$$aq = bp.$$

Il valor comune dei due prodotti aq e bp, formato, come si vede, secondo l' enunciato del teorema, è manifestamente un *multiplo comune* dei numeri a e b. Ora proveremo che esso è anche il *minimo* comune multiplo di questi numeri.

Dinotiamo con k un multiplo comune qualunque di a e b, e con n (*) il quoziente che si trova dividendolo per a; così possiamo scrivere:

$$k = an.$$

Moltiplichiamo i numeri a, b e il loro massimo comun divisore m per n. Sappiamo [189] che il terzo dei prodotti:

$$an, \quad bn, \quad mn$$

è il massimo comun divisore degli altri due. Ora si osservi che il numero b divide an (cioè k, multiplo

(*) Possiamo dunque dire che n rappresenta uno qualunque di quei numeri i quali, moltiplicati per a, danno per prodotti dei multipli comuni dei numeri a e b.

comune di a e b) e divide bn. Per conseguenza esso divide anche [187] il loro massimo comun divisore mn. Detto z il quoziente della divisione di mn per b, abbiamo:

$$mn = bz,$$

e quindi, sostituendo a b il suo valore mq, anche:

$$mn = mqz.$$

donde, sopprimendo il fattor comune m, si ricava:

$$n = qz.$$

Questa eguaglianza mostra che qualunque di quei numeri, che moltiplicati per a danno un multiplo comune dei numeri a e b, è multiplo del numero q. Quindi nessuno di codesti numeri può esser minore di q. E perchè con lo stesso numero q si ottiene un prodotto aq che è un multiplo comune di a e b, codesto prodotto aq (eguale a bp) è il minimo comune multiplo dei numeri a e b, come d. d.

199. Cor. 1°. *Ogni multiplo comune di due numeri è multiplo del loro minimo comune multiplo.*

Dim. Nel corso della precedente dimostrazione abbiamo trovato l'eguaglianza:

$$n = qz.$$

Da questa, moltiplicando per a, si ottiene:

$$an = aqz,$$

donde si riconosce che il numero an è multiplo di aq. Ma an è un multiplo qualsivoglia di a e b, ed aq è il loro minimo comune multiplo; è dunque vero che *ecc.*

200. Cor. 2°. *Se due numeri sono primi tra loro, il loro minimo comune multiplo è il loro prodotto.*

Dim. Infatti, in tal caso, il massimo comun divisore dei due numeri è l'unità, e quindi il quoziente, che si ottiene dividendo uno dei due numeri per il loro massimo comun divisore, è il numero stesso.

201. Cor. 3°. *Se il maggiore di due numeri è multiplo dell' altro, il maggiore è il minimo comune multiplo dei due numeri.* [184].

Metodo per trovare il minimo comune multiplo di quanti si vogliano numeri.

La ricerca del minimo comune multiplo di più di due numeri si può fondare sul seguente:

202. Teor. *Il minimo comune multiplo di quanti si vogliano numeri è ad un tempo il minimo comune multiplo dei numeri del sistema che si ottiene da quello dei numeri dati surrogandone due qualunque col loro minimo comune multiplo.*

Dim. Siano i numeri:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e, \tag{A}$$

e sia m il minimo comune multiplo di due di essi, ad es. dei due a e b. Dico che il minimo comune multiplo dei cinque numeri dati è eziandio il minimo comune multiplo dei numeri:

$$m,\ c,\ d,\ e. \tag{B}$$

Intanto il minimo comune multiplo dei numeri (A), che indicheremo con n, è un *multiplo comune* dei numeri (B), perchè, essendo multiplo di a e b, esso è multiplo [199] del loro minimo comune multiplo m. Ma esso è anche il *minimo* comune multiplo dei numeri (B), perchè, se un numero p, minore di n, fosse multiplo comune dei numeri (B), come multiplo di m, sarebbe [137] anche multiplo comune di a e b, e quindi dei numeri (A), i quali così avrebbero un multiplo comune minore del loro minimo comune multiplo; il che è assurdo. Così resta dimostrato che *ecc.*

203. In virtù del teorema precedente, la ricerca del minimo comune multiplo di quanti si vogliano numeri si può far dipendere da quella del minimo comune multiplo di due numeri soltanto. Siano infatti, ad es., i quattro numeri a, b, c, d. Se m è il minimo comune multiplo dei due a e b, la difficoltà è ridotta a determinare quello dei tre numeri, m, c, d. Così, se n è il minimo comune multiplo di c e d, se p è quello di m ed n, codesto numero p è il minimo comune multiplo dei quattro numeri dati.

$$\underbrace{a \quad b}_{m} \quad c \quad d$$
$$m \quad \underbrace{c \quad d}_{n}$$
$$\underbrace{m \qquad n}_{p}$$

Possiamo dopo di ciò enunciare la:

Regola. *Per trovare il minimo comune multiplo di quanti si vogliano numeri, si cerca dapprima il minimo comune multiplo di due qualunque di quei numeri, e lo si scrive in loro vece. Così si passa ad un sistema, che contiene un numero di meno che il primitivo. Quindi, presi ad arbitrio due dei numeri del nuovo sistema, si cerca il loro minimo comune multiplo, e lo si scrive in loro vece. Così, continuando, si perviene ad un sistema composto di due numeri soltanto. Il minimo comune multiplo di questi ultimi è il minimo comune multiplo dei numeri dati.*

204. Oss. Se qualcuno dei numeri, dei quali si vuole determinare il minimo comune multiplo, è *divisore* di un altro, esso si può trascurare senza più. Infatti, se si comincia l'operazione con quei due numeri, si trova da mettere al loro posto per l'appunto il maggiore di essi due. [201].

Perciò, ad es., dovendo determinare il minimo comune multiplo dei numeri:

2, 4, 5, 15, 21, 25, 63,

si può restringersi alla ricerca del minimo comune multiplo dei numeri:

$$4, \quad 15, \quad 25, \quad 63,$$

perchè i rimanenti sono divisori dell'uno o dell'altro dei numeri conservati.

Esercizi.

72. Dimostrare che un numero, che divide parecchi altri, divide il loro massimo comun divisore. (Estensione del teorema 187, che si fonderà sulla regola 196).
73. Trovare il maggior numero tale che, dividendo per esso i numeri 149, 100, 75 ed 86, si ottengano rispettivamente i resti 5, 4, 3 e 2.
74. Nella ricerca del massimo comun divisore il quoziente dell'ultima divisione è almeno eguale a 2.
75. Dimostrare che nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri si può prendere, in luogo del resto di una divisione, la differenza tra il minore dei numeri dati e il resto avuto. Quando tornerà conto di fare questa sostituzione?
76. Per trovare il massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri si può dividerli tutti, fuori del minore, per il minore; poi questo numero e tutti i resti, fuori del più piccolo, per questo più piccolo resto; e così di seguito finchè si trovi un resto, che divida tutti gli altri e il divisore che lo ha dato. Quest'ultimo è il massimo comun divisore cercato. Se qualcuno dei resti risultasse nullo, l'operazione si dovrebbe continuare con quegli altri. [196, 170].
77. Trovare il più piccolo numero che, diviso per qualunque dei numeri 12, 6, 9 e 15, dà sempre per resto 5.
78. Un numero pari è divisibile per 6, se la somma delle sue cifre è divisibile per 3. [193].
79. Trovare le condizioni di divisibilità per 12, 15, 18, 20, 30, 36 e 45. [193].
80. Dove si deve arrestare la seguente sequela di cifre:

    1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 . . . .,

    se si vuole che il numero sia divisibile per 2, o per 3, o per 4, o per 5, o per 6, o per 8, o per 9, o per 12, o per 15?

81. Il prodotto di tre numeri consecutivi è sempre divisibile per 6. (Ogni tre nnmeri s'incontra nn multiplo di 3. Ecc. Si badi ai teor. 137 e 193).

82. Se n è un numero qualunqne, il prodotto $n(n+1)(2n+1)$ è divisibile per 6. (Se nessuno dei due numeri n ed $(n+1)$ sia divisibile per 3, tale sarà $(n+2)$, epperò anche il suo doppio, cioè... [73], ed il multiplo antecedente è appunto... ecc.).

83. Se n indica un numero qualunqne, $n(2n+1)(7n+1)$ è sempre divisibile per 6. (Dimostrazione analoga a quella dell'esercizio antecedente).

84. Il prodotto di cinqne numeri consecutivi è divisibile per 120. (Tra cinque numeri consecutivi si trova sempre un multiplo di 4, e tra i rimanenti almeno uno è pari. Il prodotto è dunque divisibile per 8. Ogni 5 numeri si incontra nn multiplo di 5, quindi [137] il prodotto è divisibile per 5. È poi divisibile anche per 3, perchè ecc. Ma [194]....).

85. Il prodotto di 15 numeri consecutivi è sempre divisibile per 120^3. (Il prodotto dei primi cinque è divisibile per 120, epperò si pnò mettere sotto forma di prodotto di due fattori uno dei quali è 120. Si badi al teor. 88).

86. Il prodotto di n numeri consecutivi è divisibile per il prodotto di tutti i numeri primi minori di n. (Sia 7, ad es., uno di qnesti numeri primi. Ogni sette numeri si incontra un mnltiplo di 7, epperò uno degli n nnmeri è divisibile per 7, ed anche [137].... Infine si badi al teor. 194).

87. Qnale è la maggiore potenza di nn numero primo, ad es. di 7, che divide il prodotto dei primi 1000 numeri? (Snpponiamo di decomporre tutti questi primi 1000 uumeri in fattori primi per contare quanti 7 si trovano, perchè questo numero è il richiesto; ma è chiaro che basta por mente ai multipli di 7. Quanti sono questi mnltipli? Poi, dacchè unicamente c'importa di mettere in vista fattori primi eguali a 7, dividiamoli tutti per 7. Che quozienti otterremo? quali e quanti di questi quozienti ci daranno un altro fattore uguale a 7? Ecc.).

88. Dimostrare che l'esponente della maggiore potenza di un numero primo minore di n, che divide il prodotto degli n primi numeri, è la somma dei quozienti che si ottengono dividendo n per il numero primo, il quoziente trovato per

il numero primo, il nuovo quoziente per il numero primo, e così di seguito fino a che si ottenga un quoziente minore del numero primo dato. (Vedasi prima l'esercizio precedente).

89. Dimostrare che l'esponente, di cui si parla nel precedente esercizio, è uguale alla somma dei quozienti che si ottengono dividendo il numero n per le successive potenze del numero primo. (Non è che una trasformazione del teorema dell'esercizio precedente, e che si giustifica con la seconda parte del § 127).

90. La maggiore potenza di un numero primo, la quale divide il prodotto dei primi n numeri consecutivi, divide anche il prodotto di n numeri consecutivi qualunque. (Ad es. la la maggior potenza di 7, che divide il prodotto dei primi 100 numeri, divide anche il prodotto di 100 numeri consecutivi presi partendo da uno qualunque. Infatti ogni 7 numeri s' incontra un multiplo di 7, quindi in 100 numeri consecutivi si incontrano almeno tanti multipli di 7, quanti ve ne sono tra i primi 100 numeri. Dividendo per 7 tutti i multipli, i quozienti saranno numeri consecutivi. Tra questi di 7 in 7 si troveranno... ecc. Vedasi l'esercizio 89).

91. Il prodotto di n numeri consecutivi è divisibile per il prodotto dei primi n numeri. (Supponiamo decomposti i primi n numeri in fattori primi e poi fatto il prodotto. [91]. Così avremo il prodotto dei primi n numeri sotto forma di prodotto di potenze dei numeri primi minori di n. Una qualunque di queste potenze dividerà il prodotto di n numeri consecutivi qualunque. [**90**]. Ma le potenze di due numeri, primi tra loro, sono esse pure ecc. [171]. Finalmente [194] ecc.).

CAPITOLO XI

TEORIA DELLE FRAZIONI

Definizioni.

205. Finora noi abbiamo considerato un numero come una parola atta ad esprimere quanti fossero gli oggetti di una collezione data; ed abbiamo fatto applicazione delle proprietà dei numeri a questioni in cui si trattava di aggregare collezioni d' oggetti o di spartire gli oggetti d' una collezione. Ma ciascun oggetto rimaneva inalterato, o perchè la natura dell' oggetto non ammetteva in esso alcuna modificazione [130, 131]; o perchè il problema non richiedeva che alcun oggetto fosse modificato.

Ora in pratica è frequentissimo il caso di dover considerare oggetti che si possono dividere in parti, e questioni in cui si tratta di parti di oggetti. (*). Ci approntereno il mezzo per risolvere, per la parte numerica, così fatte questioni, imaginando che l' ente astratto, aritmetico, che si dice *unità*, si possa dividere in qualunque numero di parti eguali, e che tutte le unità, posto che se ne debbano considerare parecchie, siano perfettamente uguali. Donde segue che, quando tutte le unità vengano divise in uno stesso numero di parti uguali, tutte le parti sono eguali tra loro.

(*) Non spetta all' Aritmetica di occuparsi del modo in cui un dato oggetto può esser diviso; nè di riconoscere se possa esser diviso senza restrizioni; ecc.

206. Quando un oggetto vien diviso in parti eguali, ciascuna parte si dice *parte aliquota* di quell'oggetto. È manifesto che una parte aliquota di un oggetto noto vien determinata indicando il numero delle parti in cui l'oggetto è stato diviso. Vien usato a tal fine il numero ordinale corrispondente al numero delle parti. Così, ad es., se un oggetto vien diviso in 12 parti eguali, una delle parti si chiama *un dodicesimo* di quell'oggetto. (Fa eccezione il caso in cui le parti sono *due*, perchè ciascuna, invece di un *secondo*, dice *un mezzo* od *una metà*).

207. Una parte aliquota dell'unità si rappresenta scrivendo sotto della cifra 1 il numero delle parti in cui l'unità è stata divisa, e separando i numeri con una linea. Così, ad es., *un dodicesimo* di unità si indica scrivendo: $\frac{1}{12}$.

208. Divisa un'unità in parti eguali, o divise più unità in uno stesso numero di parti eguali, si può considerare una collezione di alquante di codeste parti aliquote uguali. È chiaro che una collezione così fatta risulta determinata, quando sia fatto conoscere il numero delle parti in cui l'unità è stata divisa, o il numero delle parti che compongono la collezione. E in fatti si esprime codesta collezione enunciando il numero delle parti e facendolo seguire dalla *denominazione* comune delle parti. E si rappresenta codesta collezione scrivendo sotto il primo numero il secondo e separandoli con una linea. Perciò, ad es., la scrittura $\frac{7}{12}$, che si legge: *sette dodicesimi*, rappresenta la collezione di 7 *dodicesimi* d'unità.

209. Una parte aliquota d'unità ed anche l'aggregato di parti aliquote uguali d'unità si dicono *frazioni*. Il numero delle parti si dice *numeratore*; l'altro numero, che esprime in quante parti l' unità è stata divisa, si chiama *denominatore.*

Il numeratore e il denominatore collettivamente si chiamano i *termini* della frazione.

210. Il numeratore di una frazione può essere minore, uguale o maggiore del denominatore. Corrispondentemente la frazione si dice *propria* (*pura*), *apparente* od *impropria* (*spuria*).

È manifesto che una frazione propria è minore dell' unità; che una frazione apparente è uguale all' unità, e che ogni frazione impropria è maggiore di *uno.*

Prime proprietà d' una frazione.

211. *Aumentando soltanto il numeratore di una frazione, si aumenta il valore della frazione.*

Infatti, aumentare il numeratore d' una frazione equivale a mettere insieme con la collezione di parti aliquote d' unità, che è rappresentata dalla frazione data, altre di quelle stesse parti aliquote.

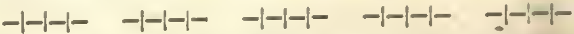
212. *Aumentando soltanto il denominatore d' una frazione, si diminuisce il valore della frazione.*

Infatti, aumentando il solo denominatore, ciascuna delle parti aliquote componenti la frazione data viene impiccolita, dacchè in quante più parti eguali si divide uno stesso oggetto, e tanto più piccole riescono le parti.

213. Teor. *Moltiplicando i termini di una frazione per uno stesso numero, non si altera il valore della frazione.*

Dim. Prendiamo, ad es., la frazione $\frac{3}{5}$, e proponiamoci di provare che, moltiplicandone i termini per un stesso numero, ad es. per 4, il valore della frazione non muta.

Perciò, divisa l'unità in 5 parti eguali, come si è dovuto fare per ottenere la frazione $\frac{3}{5}$, imaginiamo di dividere poi ciascuna delle parti in 4 parti eguali.



Così l'unità resta divisa in $4 \cdot 5$ parti eguali. E poichè dalle 3 parti componenti la frazione data si ricavano $4 \cdot 3$ delle nuove parti, conchiudiamo essere appunto:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} \qquad \text{c. d. d.}$$

214. Cor. *Se i termini di una frazione hanno un divisore comune, dividendo i termini per questo numero non si altera il valore della frazione.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{30}{40}$, i cui termini sono divisibili per 10. Dividendo i termini per 10 (o, come si suol dire, *sopprimendo* il fattore 10 comune ai due termini), risulta la frazione $\frac{3}{4}$. Dico essere:

$$\frac{30}{40} = \frac{3}{4}.$$

Infatti, poichè i termini della seconda frazione sono i quozienti delle divisioni, senza residuo, dei termini della prima frazione per 10, moltiplicando i termini della seconda frazione per 10, risulta la prima frazione. Epperò [213] le due frazioni sono equivalenti, c. d. d.

215. Oss. Se i termini di una frazione vengono divisi per il loro massimo comun divisore, la frazione si trasforma in una equivalente [214], i cui termini sono [191] primi tra loro; epperò la frazione si trova ridotta a tal forma, che non sappiamo ulteriormente *semplificare.* Il teorema seguente prova che una ulteriore semplificazione è impossibile.

216. Teor. *Una frazione, se è equivalente ad un'altra i cui termini siano primi tra loro, ha termini che sono rispettivamente equimultipli di quelli della seconda frazione.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{7}{12}$ i cui termini sono primi tra loro. Supponiamo che le lettere a e b rappresentino due numeri interi, tali che la frazione $\frac{a}{b}$ sia equivalente a $\frac{7}{12}$. Proveremo che il numero a è multiplo del numeratore 7, e che il numero b è multiplo del denominatore 12 secondo lo stesso moltiplicatore.

È intanto per ipotesi:

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{12}.$$

Moltiplichiamo i termini della prima frazione per 12, e i termini dell'altra per il numero b. Le due frazioni risultanti, perchè [213] rispettivamente equivalenti alle primitive, sono anch'esse equivalenti tra loro. Abbiamo adunque:

$$\frac{a \cdot 12}{b \cdot 12} = \frac{7 \cdot b}{12 \cdot b}.$$

In queste frazioni equivalenti, poichè sono eguali i denominatori, sono eguali [211] necessariamente anche i numeratori. È dunque:

$$a \cdot 12 = 7 \cdot b.$$

E poichè questi prodotti sono eguali, il numero 7, che divide il secondo, divide anche il prodotto $(a \cdot 12)$. Ma 7 è primo col fattore 12; perciò esso divide [192] necessariamente l'altro fattore a.

Così intanto abbiamo provato che il numero a è multiplo di 7; supponiamo che sia $a = 7 \cdot m$, dove m

rappresenta il quoziente della divisione senza resto di a per 7. Ci rimane da provare che dev'essere $b = 12 \cdot m$.

A tal fine basta sostituire ad a il prodotto $7 \cdot m$ nella precedente uguaglianza, giacchè risulta l'eguaglianza:

$$7 \cdot m \cdot 12 = 7 \cdot b,$$

dalla quale, sopprimendo il fattore 7 comune ai due membri, si ottiene:

$$m \cdot 12 = b, \qquad \text{c. d. d.}$$

217. Oss. Da ciò che precede risulta che, quando i termini di una frazione sono primi tra loro, la frazione non può essere equivalente ad un'altra composta di numeri rispettivamente minori. Pertanto una frazione, i cui termini siano primi tra loro, si dice *ridotta ai minimi termini*, od anche *irreducibile.*

218. Dal precedente teorema si ricava anche questa conseguenza che, se una data frazione è irreducibile, moltiplicando i suoi termini ordinatamente per i numeri interi successivi 2, 3, 4, 5..., si ottengono tutte le frazioni equivalenti alla data. La loro serie però non termina mai.

219. Data una frazione, sia essa irreducibile o no, moltiplicandone ordinatamente i termini per i numeri interi successivi 2, 3, 4, ecc., si ottengono frazioni, i cui denominatori sono i multipli del denominatore della frazione primitiva, nessun multiplo escluso. Ne viene questa conseguenza che una frazione data si può sempre trasformare in una che abbia per denominatore un multiplo qualunque del denominatore della frazione data. È manifesto [213] che si ottiene questo intento operando come indica la seguente:

220. Regola. *Per trasformare una frazione in* *una che abbia per denominatore un multiplo del denominatore, si moltiplicano i due termini della frazione per il quoziente che si ottiene dividendo il multiplo dato per il denominatore della frazione.*

221. Un numero intero si può mettere sotto forma di frazione con denominatore prestabilito qualunque. Ad es., dato l'intero 5, per trovare una frazione equivalente a 5 e con denominatore 9, basta osservare che, dividendo ciascuna delle 5 unità in 9 parti eguali, si ottengono 9 · 5, cioè 45 *noni*. Per conseguenza è:

$$5 = \frac{5 \cdot 9}{9}.$$

222. Oss. Giova osservare che la trasformazione di un intero in una frazione di dato denominatore si fa diventare un caso particolare della trasformazione d'una frazione in un'altra equivalente di denominatore prestabilito, se si introduce in Aritmetica un simbolo, quale ad es. $\frac{5}{1}$, e si stabilisce che esso sia equivalente al numeratore.

In grazia di questa convenzione diventa lecita la semplificazione d'una frazione, il cui numeratore sia multiplo del denominatore, anche nel caso che si dividano i due termini per il denominatore. Senza la detta convenzione, proposta ad es. la frazione $\frac{15}{3}$, si sarebbe dovuto dire: non si possono dividere i due termini per 5, perchè risulta la forma $\frac{3}{1}$, che non significa nulla. (Infatti, non si può interpretarla come qualsiasi altra frazione, perchè il numero delle parti eguali, in cui si divide un' unità, non può essere uguale ad *uno*).

Ma l'utilità principale della precedente convenzione è questa che in virtù di essa il numero intero diventa un caso particolare delle frazione; e così nelle regole delle operazioni non fa d'uopo distinguere se i numeri dati siano tutti frazionari, o siano in parte interi e in parte frazioni.

Riduzione delle frazioni a denominatore comune.

223. Fondandosi sulla proprietà d'ogni frazione di poter esser trasformata in una ad essa equivalente, il cui denominatore sia un multiplo dato qualunque del denominatore della frazione data, si può, essendo date più frazioni, trovarne altre rispettivamente equivalenti alle date ed aventi per denominatore comune un dato multiplo comune qualunque dei denominatori delle frazioni stesse. Per trovare i numeratori delle nuove frazioni, si moltiplicheranno [220] i numeratori delle frazioni date rispettivamente per i quozienti delle divisioni del nuovo denominatore per i denominatori delle frazioni stesse.

Un multiplo comune di più numeri, facile a trovare, è il loro prodotto; perciò in pratica, dovendo ridurre più frazioni a denominatore comune, si suol prendere per nuovo denominatore il prodotto dei denominatori. E poichè il quoziente della divisione di codesto prodotto per uno dei denominatori è il prodotto di tutti gli altri, abbiamo la seguente:

224. Regola. *Per ridurre più frazioni a medesimo denominatore, si moltiplicano i due termini di ciascuna per il prodotto dei denominatori di tutte le altre.*

Es. Operando conforme alla regola precedente sulle seguenti frazioni:

$$\frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{8}{5}, \qquad \frac{6}{7},$$

si ottiene:

$$\frac{280}{420}, \quad \frac{105}{420}, \quad \frac{672}{420}, \quad \frac{360}{420}.$$

225. Sappiamo [216] che, se una frazione è equivalente ad un'altra che sia ridotta ai minimi termini, il denominatore della prima è necessariamente un multiplo del denominatore della seconda.

Da questo teorema risulta che, date più frazioni irreducibili, e trovato il minimo comune multiplo dei denominatori, codesto multiplo è il più piccolo denominatore comune a cui si possano ridurre le frazioni date. Quindi la:

Regola. *Per ridurre più frazioni al minimo comun denominatore, si comincia a ridurre le frazioni ai minimi termini, poi si cerca il minimo comune multiplo dei denominatori, e così si ha intanto il minimo comun denominatore. Poi si divide questo numero per i singoli denominatori delle frazioni ridotte, e per i quozienti si moltiplicano rispettivamente i loro numeratori.*

226. Oss. Può darsi che il minimo comune multiplo dei denominatori sia lo stesso prodotto dei denominatori; in questo caso la regola precedente ricade in quella del § 224.

Es. Si riducano al minimo comun denominatore le frazioni:

$$\frac{5}{6}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{8}{15}, \quad \frac{9}{20}.$$

Poichè, come è facile riconoscere, queste frazioni sono irreducibili, si comincia a determinare il minimo comune multiplo dei denominatori; si trova 120. Poi si divide questo numero per i singoli denominatori. Per i quozienti:

20, 15, 10, 8, 6

si moltiplicano rispettivamente i numeratori. Risultano le frazioni:

$$\frac{100}{120}, \quad \frac{75}{120}, \quad \frac{70}{120}, \quad \frac{64}{120}, \quad \frac{54}{120},$$

che sono le domandate.

Addizione delle frazioni.

227. Def. *Si dice* somma *di più numeri quel numero che è composto con tutte le unità e parti aliquote d'unità che formano i numeri dati.*

Questa definizione comprende come caso particolare quella dell'addizione degl'interi.

228. Quando delle frazioni date hanno medesimo denominatore, per ottenere la somma basta contare quante sono in tutte le parti aliquote che compongono le frazioni. Il numero, che risulta, è manifestamente la somma dei numeratori; si trova ricorrendo all'addizione degl'interi ed è il numeratore della somma; il denominatore poi è quello stesso delle frazioni date.

Se sian date da sommare frazioni che non abbiano denominatore comune, si riducono a denominatore comune, e così ci si riconduce al caso precedente. Quindi la:

229. Regola. *Per sommare delle frazioni, bisogna anzitutto ridurle a denominatore comune, poi si sommano i numeratori, e al risultato si dà per denominatore il comune denominatore.*

Es. $\frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{1}{3} = \frac{18}{30} + \frac{21}{30} + \frac{10}{30} = \frac{49}{30}.$

230. Oss. Dalla regola per l'addizione delle frazioni risulta chiaro che l'operazione gode le stesse proprietà dell'addizione degl'interi. In grazia di codeste proprietà si può talvolta, variando il modo di operare, ottenere più prontamente la somma. Così, ad es., dovendo trovar la somma di molti numeri, altri interi, altri frazionari, è opportuno di trovare anzitutto la somma dei primi, poi la somma delle frazioni, e sommare infine i due risultati. Talvolta si può riconoscere opportuno sommare prima talune frazioni che si possano ridurre facilmente a comun denominatore. In tal caso torna conto di solito, appena trovata la somma parziale, semplificarla, se non sia già irreducibile.

231. Quando il risultato di un calcolo è una frazione spuria, ordinariamente si decompone questa frazione in due parti, in modo che una parte sia intera e l'altra sia una frazione pura. Per vedere come si faccia codesta decomposizione, prendiamo a considerare una frazione spuria qualunque, ad es. la frazione $\frac{100}{13}$.

Dacchè *13 tredicesimi* bastano a comporre un'unità, se noi sottraiamo da 100 il denominatore 13, e poi 13 dal resto, e così di seguito, ad ogni sottrazione, che possiamo eseguire, corrisponde una nuova unità che si può ricavare dalla frazione proposta. Il numero delle unità, che si possono ottenere, è dunque [96] uguale al quoziente della divisione del numeratore per il denominatore; e poichè nel caso nostro si trova 7 per quoziente e il resto 9, si conchiude che con 100 *tredicesimi* si possono comporre 7 unità, e che tuttavia rimangono 9 *tredicesimi*. Possiamo scrivere pertanto:

$$\frac{100}{13} = 7 + \frac{9}{13},$$

e dire in generale che:

Una frazione spuria equivale al quoziente della *divisione del numeratore per il denominatore, più la frazione che ha il resto per numeratore, e per denominatore quello stesso della frazione data.*

Sottrazione delle frazioni.

232. Def. *La sottrazione è l' operazione aritmetica con la quale, data la somma di due numeri e uno di questi, si trova quell' altro.*

233. 1°. Proponiamoci per primo caso di trovare la differenza di due frazioni aventi medesimo denominatore, quali sono, ad es., le due:

$$\frac{8}{11} \text{ e } \frac{3}{11}.$$

Se pensiamo alla regola per l' addizione di frazioni con denominatore comune, troviamo subito la frazione che, sommata con $\frac{3}{11}$, dà $\frac{8}{11}$. È dunque:

$$\frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{8-3}{11} = \frac{5}{11}.$$

2°. Se le frazioni date hanno differente denominatore, converrà ridurle prima a denominatore comune; poi si eseguirà la sottrazione come nel caso dianzi considerato. Adunque:

234. Regola. *Per trovare la differenza di due frazioni, bisogna anzitutto ridurle a denominatore comune; poi si fa la differenza dei numeratori, e ad essa si sottopone il comune denominatore.*

235. Oss. Supponiamo che da un numero si debba sottrarre la somma di parecchi altri. Imaginando che la frazione minuendo e le parti del sottraendo siano tutte ridotte a denominatore comune, i calcoli si devono poi eseguire sui numeratori, e in fine si deve sottoporre al risultato il denominatore comune. Ma, trattandosi di interi, abbiamo trovato [57] che, dovendo sottrarre una somma, si può sottrarre successivamente le singole parti, e reciprocamente [58]; questo teorema vale adunque anche per numeri frazionari. In base a ciò in pratica si può talvolta variare il calcolo all'intento di raggiungere più prontamente il risultato finale.

Moltiplicazione d'una frazione per un intero.

236. Può darsi che più frazioni da sommare insieme siano eguali tra loro. A questo caso si adatta il concetto di moltiplicazione degl'interi; una delle frazioni è il *moltiplicando,* il loro numero è il *moltiplicatore,* il risultato è il *prodotto.* E l'operazione si dice *moltiplicazione della frazione per l'intero.*

E dacchè ora sotto la denominazione di numero, quando non sia espressamente detto di più, dobbiamo intendere raccolti i due casi di numero intero e numero frazionario, una medesima definizione vale sia il moltiplicando intero, oppure una frazione.

237. Def. *Moltiplicare un numero (intero o frazionario) per un* intero *significa calcolare la somma di tanti numeri eguali al primo, quante sono le unità del secondo.* (*).

238. Ed ora proponiamoci, ad es., di moltiplicare $\frac{4}{7}$ per 5. Per definizione abbiamo:

$$\frac{4}{7} \cdot 5 = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7},$$

e per la regola [229] dell'addizione delle frazioni

(*) In altre parole: *moltiplicare per un intero significa trovare un numero il quale sia composto col moltiplicando come il moltiplicatore è composto con l'unità.*

egli è:

$$\frac{4}{7} \cdot 5 = \frac{4 + 4 + 4 + 4 + 4}{7}$$

ossia:
$$\frac{4}{7} \cdot 5 = \frac{4 \cdot 5}{7};$$
quindi la:

239. Regola. *Per moltiplicare una frazione per un intero, si moltiplica per questo intero il numeratore della frazione, e si lascia immutato il denominatore.*

240. Può darsi che il numero intero per il quale si deve moltiplicare una frazione, divida esattamente il denominatore della frazione; in questo caso il prodotto si può ottenere in modo più conveniente. Ad es., si debba moltiplicare $\frac{3}{14}$ per 7. Operando secondo la regola testè stabilita, lasciando indicata la moltiplicazione del numeratore per il moltiplicatore, abbiamo intanto:

$$\frac{3}{14} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{14}.$$

È manifesto che la frazione trovata si può semplificare per 7. Sopprimendo questo fattore comune ai due termini del prodotto, otteniamo:

$$\frac{3}{14} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{14} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{3}{2}.$$

L' esempio considerato suggerisce la:

241. Regola. *Per moltiplicare una frazione per un intero, che divida il denominatore, basta eseguire questa divisione.*

242. Nella precedente è compresa [222] la:

Regola. *Il prodotto di una frazione per un intero, che sia eguale al denominatore, è uguale al numeratore.*

Ad es., è:

$$\frac{3}{7} \cdot 7 = 3.$$

Divisione d'una frazione per un intero.

243. Ora che abbiamo imparato a moltiplicare una frazione per un intero, proponiamoci di risolvere il problema inverso: *Data una frazione e dato un numerò intero, trovare una frazione che, moltiplicata per l'intero, dia per prodotto la frazione data.*

Ad es., si debba trovare la frazione che, moltiplicata per 7, dà per prodotto la frazione $\frac{3}{5}$.

Sappiamo che si moltiplica una frazione per un intero, moltiplicando il numeratore per l'intero e lasciando inalterato il denominatore. Pertanto, se il numeratore della frazione $\frac{3}{5}$ fosse divisibile per 7, dividendo il numeratore per 7 e lasciando immutato il denominatore, si otterrebbe appunto la frazione cercata.

Ma poichè una frazione non muta se si moltiplicano i suoi termini per uno stesso numero, moltiplicando i termini della data frazione per 7, otteniamo che il suo numeratore acquisti la proprietà desiderata. Così la frazione data diventa:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7}\,; \quad \text{epperò} \quad \frac{3}{5 \cdot 7}$$

è la frazione domandata.

Infatti, moltiplicandola per 7, si ottiene [239,214] per prodotto $\frac{3}{5}$.

Ora, volendo dar nome all'operazione aritmetica precedente, osserveremo che la frazione richiesta, dovendo esser tale che, sommando 7 frazioni eguali ad essa, si ottenga per risultato $\frac{3}{5}$, deve in altre parole essere *un settimo* di $\frac{3}{5}$. Epperciò la questione si poteva anche proporre nel modo seguente: data la collezione di *3 quinti* d'unità, dividerla in 7 parti eguali, e trovare il numero che esprime una delle parti. Manifestamente questo problema è uno dei due che abbiamo imparato a risolvere mediante la *divisione*; la differenza sta solo in questo che, prima di considerare frazioni, le unità delle collezioni date si supponevano di tal natura da non potersi dividere in parti, dimodochè generalmente il problema di dividere una collezione data in un dato numero di parti eguali non si poteva risolvere compiutamente, perchè in fine si aveva una parte (il resto della divisione) che rimaneva indivisa. Ora invece, ammettendo che delle unità si possano far parti eguali secondo qualunque numero intero dato, il problema si può sempre risolvere esattamente, senza che nulla rimanga in fine.

L' operazione aritmetica, che abbiamo considerata ultimamente, si dirà adunque: *divisione della frazione* $\frac{3}{5}$ *per* 7. La frazione $\frac{3}{5}$ si dirà *dividendo*; il numero 7 si dirà *divisore*; e si dirà *quoziente* il numero che si deve determinare. Per l' operazione stessa vale immutata la seconda definizione di divisione dei numeri interi [104]; soltanto, perchè ora il prodotto del divisore per il quoziente è sempre uguale al dividendo, possiamo togliere una parola superflua (la parola *maggiore*) e dire:

244. Def. *Dividere un numero (intero o frazionario) per un* intero *significa trovare un numero tale che, moltiplicato per l'intero, dia per prodotto l' altro numero dato.*

Da quanto precede [243, 244] ora possiamo raccogliere le due regole seguenti:

245. Regola. *Per dividere una frazione per un intero, si moltiplica per l'intero il denominatore della frazione e si lascia inalterato il numeratore.*

246. Regola. *Per dividere una frazione per un intero, se il numeratore è divisibile per l'intero, si divide il numeratore per l'intero e si lascia inalterato il denominatore.*

247. L'operazione di divisione si indica col segno : , che si scrive tra il dividendo ed il divisore.

Così, applicando le due regole precedenti, possiamo scrivere, ad es., :

$$\frac{3}{5} : 7 = \frac{3}{5 \cdot 7} \quad \text{e} \quad \frac{15}{7} : 5 = \frac{3}{7} \cdot$$

Divisione di un intero per un altro.

248. Proponiamoci di dividere, ad es., 100 per 12. Qui si tratta di trovare un numero [244], intero o frazionario, il quale, moltiplicato per 12, dia 100 per prodotto.

Avendo presente il caso di moltiplicazione di una frazione per il suo denominatore, si conchiude che il quoziente cercato è la frazione che ha il dividendo per numeratore e per denominatore il divisore. E infatti egli è per l'appunto:

$$\frac{100}{12} \cdot 12 = 100$$

e per conseguenza [244] abbiamo:

$$100 : 12 = \frac{100}{12} \cdot$$

Allo stesso risultato saremmo pervenuti pensando che, poichè dividere per un intero equivale a trovar quella parte aliquota del dividendo che è indicata dal divisore, nell' esempio considerato si doveva determinare il *dodicesimo* di 100. Ora, imaginando che ciascuna delle 100 unità sia divisa in 12 parti eguali, prendendo da ciascuna unità una delle sue parti, si ottiene un *dodicesimo* del totale, il quale è appunto formato di 100 *dodicesimi*.

Conchiudiamo la:

249. Regola. *Il quoziente della divisione di un intero per un altro è la frazione che ha numeratore uguale al dividendo e denominatore uguale al divisore.*

250. Oss. 1ª. La relazione precedente, letta cominciando dal secondo membro, si traduce nella proposizione:

Una frazione si può considerare come il quoziente della divisione del numeratore per il denominatore. (*).

251. Oss. 2ª. L'ultima relazione giustifica l'uso della linea, in luogo del segno :, per indicare la divisione.

252. Oss. 3ª. Nella divisione di un intero per un intero, quando il dividendo è maggiore del divisore, il risultato ottenuto secondo l'ultima regola è una frazione spuria, che si può decomporre in una parte intera ed in una parte che è una frazione pura.

Così, ad es., abbiamo [231]:

$$100 : 12 = \frac{100}{12} = 8 + \frac{4}{12}.$$

Codesto esempio ci fa vedere che la parola *quoziente*, presa nel senso in cui la abbiamo usata la prima volta, corrisponde a *parte intera* del quoziente, quale lo vogliamo intendere d'ora in poi; e l'operazione di divisione degli interi (che si dice *divisione*

(*) Se sostanzialmente torna lo stesso, c'è però diversità nei due modi di interpretare un simbolo, quale, ad es., $^3/_7$. In un modo si trova che rappresenta la collezione di 3 *settimi* di una unità. Nell'altro rappresenta la *settima* parte di una collezione di 3 unità.

in senso stretto) vale a calcolare la parte intera del quoziente. Il quoziente *completo* si ottiene aggiungendo al *quoziente intero* la frazione che ha per numeratore il resto e per denominatore il divisore.

Quando il resto è nullo, in tal caso le espressioni *quoziente intero* e *quoziente completo* significano la stessa cosa.

Moltiplicazione per una frazione.

253. Ora vogliamo considerare il caso in cui il moltiplicatore è una frazione. Qui occorre una definizione nuova, perchè, nel senso usato finora, il moltiplicatore, esprimendo il numero degli addendi eguali, è necessariamente un numero intero.

254. Def. *Moltiplicare un numero (intero o frazionario) per una frazione significa dividere quel numero per il denominatore della frazione, e poi moltiplicare il quoziente per il numeratore.* (*).

Così, ad es., moltiplicare $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{7}$ significa (*per convenzione*) dividere $\frac{2}{5}$ per 7 e poi moltiplicare il quoziente per 3.

Nel caso che il numeratore della seconda frazione

(*) Per vedere a quale intento s'introducano in Aritmetica moltiplicatori frazionari, consideriamo la seguente questione:

Un metro di una certa stoffa costa $^9/_{10}$ di lira. Quanto valgono 15 metri, quanto $^1/_7$ di metro, quanto $^3/_7$ di metro?

Qui si tratta di risolvere più volte la stessa questione, dato cioè il prezzo di una unità, bisogna determinare i prezzi di varie porzioni di stoffa.

Nel primo caso basta moltiplicare il prezzo *unitario* per 15; nel secondo bisogna invece dividerlo [244] per 7; nel terzo caso manifestamente bisogna combinare le due opera-sia eguale all' unità, l'operazione si riduce a dividere per il denominatore. Per conseguenza, ad es., moltiplicare per $\frac{1}{7}$ e dividere per 7 non sono che due modi diversi di accennare una stessa operazione.

255. Quando la frazione, per la quale si moltiplica un numero, ha il numeratore uguale al denominatore, il prodotto è uguale al moltiplicando. Infatti, ad es., per moltiplicare $\frac{2}{5}$ per $\frac{7}{7}$, bisogna dividere prima per 7, cioè calcolare un settimo di $\frac{2}{5}$, e poi moltiplicare il settimo per 7, cioè sommare insieme tutti e 7 i settimi. Manifestamente così si torna ad ottenere il moltiplicando $\frac{2}{5}$.

Analogamente si può riconoscere che, secondo che il numeratore della frazione, per la quale si moltiplica, è maggiore o minore del denominatore, il prodotto è rispettivamente maggiore o minore del moltiplicando.

zioni, bisogna cioè dividere [244] il prezzo unitario per 7 (per conoscere intanto il prezzo di un settimo di metro), e poi moltiplicare il quoziente per 3.

L'identità delle tre questioni ha fatto dare lo stesso nome all' operazione aritmetica con cui si risolvono, benchè l'operazione vari da caso a caso; talvolta semplice, talvolta composta di due operazioni. Ma, invece di inventare una nuova parola, si è conservata quella in uso per il caso più semplice; epperò si stabilì di dire, ad es.,:

Moltiplicare per $^1/_7$, invece di dire *dividere per* 7.

Moltiplicare per $^3/_7$, invece di dire *dividere per* 7 e *poi moltiplicare il quoziente per* 3.

Così, senza che occorra distinguere un caso dall'altro, si può dire: per ottenere il prezzo di una porzione stabilita (numericamente) di stoffa, si moltiplica il prezzo dell'unità per il numero rappresentante la porzione di stoffa di cui si tratta. (In tal modo si consegue di poter trattare problemi di questa natura in *generale*).

256. Oss. Sappiamo che il numero intero è un caso particolare del numero frazionario, tantochè qualunque numero intero si può mettere sotto forma di frazione. Per conseguenza la definizione di moltiplicazione per un numero intero dev' essere compresa in quella di moltiplicazione per una frazione. In altre parole, essendo, ad es., $5 = \frac{15}{3}$, moltiplicando un numero per 5 e moltiplicandolo per $\frac{15}{3}$, si devono ottenere risultati eguali. E ciò ha luogo in realtà.

Infatti, posta la frazione $\frac{15}{3}$ sotto la forma $\frac{3 \cdot 5}{3}$; vediamo che per moltiplicare per $\frac{15}{3}$ si può (*), dopo di aver diviso per 3, invece che moltiplicare per 15, moltiplicare il quoziente per 3 e poi il prodotto per 5. La seconda operazione distrugge l'effetto della prima; epperò in fatto, moltiplicando un numero per $\frac{15}{3}$, oppure moltiplicandolo per 5, si ottengono prodotti eguali.

Se i due prodotti non fossero stati eguali, le due definizioni di moltiplicazione si sarebbero contradette tra loro, e la nuova non si sarebbe potuta accettare.

È manifesto che, anche quando il moltiplicatore è una frazione, si può dire che il prodotto è formato col moltiplicando, come il moltiplicatore è formato con l'unità. Considerando la cosa in questo modo, i due casi di moltiplicazione per un intero e per una frazione hanno definizione comune.

Si potrebbe anche dire: *Moltiplicare per una frazione significa determinare quella parte del moltiplicando che è indicata dal moltiplicatore.*

Quest' ultima definizione accenna meglio delle altre in qual caso, in pratica, si deve ricorrere alla moltiplicazione.

(*) Qui veramente si allude ad un teorema che viene nel seguito, perchè nel prodotto di tre fattori, di cui si parla, il primo può essere una frazione. Ma è facile rendersene

257. Sia ora da moltiplicare, es., ad la frazione $\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{3}$.

Sappiamo che moltiplicare $\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{3}$ vuol dire dividere $\frac{5}{7}$ per 3 e poi moltiplicare il quoziente per 4. La prima operazione [245] ci dà $\frac{5}{7 \cdot 3}$; con la seconda [239] otteniamo $\frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3}$ Egli è dunque:

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3}; \quad \text{quindi la:}$$

258. Regola. *Il prodotto di due frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori, e per denominatore il prodotto dei denominatori.* (*).

259. Nella regola precedente è contenuto il caso della moltiplicazione di una frazione per un intero; basta perciò riguardare l'intero come una frazione con denominatore *uno*.

Infatti egli è, ad es.,:

$$\frac{3}{4} \cdot 7 = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{1} = \frac{3 \cdot 7}{4},$$

come si sarebbe trovato operando secondo la regola trovata a posta per questo caso.

260. È compresa anche la regola di moltiplicazione d'un intero per una frazione. Ad es., si debba moltiplicare 7 per $\frac{3}{4}$.

Sappiamo che moltiplicare per $\frac{3}{4}$ significa dividere per 4 e poi moltiplicare per 3. Con la prima

ragione, imaginando scritte 15 frazioni, eguali al primo fattore, disposte in 3 gruppi ciascuno di 5.

(*) Si suol dire: *per moltiplicare una frazione per un'altra, si moltiplicano i numeratori tra loro e i denominatori tra loro*, lasciando sottinteso che cosa si deve poi fare dei prodotti.

operazione [249] si ottiene $\frac{7}{4}$; la seconda [239] ci dà $\frac{7 \cdot 3}{4}$. A questo medesimo risultato si perviene appunto operando secondo la regola di moltiplicazione di due frazioni, purchè si imagini di dover moltiplicare $\frac{7}{1}$ per $\frac{3}{4}$.

261. Oss. Sappiamo [254] che moltiplicare per una frazione significa dividere per il denominatore e poi moltiplicare il quoziente per il numeratore. Ora, se prima di eseguire la moltiplicazione, si moltiplicassero i due termini della frazione moltiplicatore per uno stesso numero, o si sopprimesse un loro fattore comune, la frazione non muterebbe di valore [213, 214], ma resterebbe modificata l'operazione che si deve fare sul moltiplicando; non resterebbe però alterato il risultato finale. Per convincersene basta por mente alla regola per la moltiplicazione delle frazioni. Infatti, semplificando, ad es., il moltiplicatore, si viene in qualche modo a semplificare anticipatamente il prodotto.

Prodotti di più numeri.

262. Come per i numeri interi, così anche per le frazioni avviene che, date alquante frazioni, si debba moltiplicare la prima per la seconda, poi il prodotto per la terza, e così via.

L'ultimo prodotto si dice *prodotto delle frazioni date*, e si indica scrivendo le frazioni, una in seguito all'altra, separate da punti.

263. Ad es., si debbano moltiplicare tra loro le frazioni:

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{7}{11}, \quad \frac{9}{1}.$$

Moltiplicando successivamente [258], si ottiene il prodotto finale:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9}{5 \cdot 3 \cdot 11};$$ quindi la:

264. Regola. *Il prodotto di quante si vogliano frazioni è la frazione, che ha per numeratore il prodotto dei numeratori, e per denominatore il prodotto dei denominatori.*

265. Oss. Dovendo fare il prodotto di più frazioni, giova lasciar dapprima indicate le moltiplicazioni tra i numeratori e quelle tra i denominatori, ed osservare se nei due termini della frazione prodotto ci siano fattori comuni da sopprimere. Così, ad es., dovendo fare il prodotto delle frazioni $\frac{10}{7}$, $\frac{21}{5}$, $\frac{3}{11}$, dapprima si scrive il prodotto sotto la forma:

$$\frac{10 \cdot 21 \cdot 3}{7 \cdot 5 \cdot 11};$$

così si scorgono più facilmente i fattori comuni ai due termini, e si evitano operazioni inutili. Sopprimendo questi fattori, si ottiene $\frac{18}{11}$.

266. Teor. *Un prodotto non muta, se si muta l' ordine dei fattori.*

Dim. Infatti i prodotti che si ottengono moltiplicando tra loro le medesime frazioni [222], prendendole in due ordini differenti, hanno eguali i numeratori come prodotti dei medesimi numeri interi [87]. E per la stessa ragione sono eguali i denominatori.

267. Dal teorema precedente, in modo del tutto analogo a quello usato allorquando si consideravano unicamente numeri interi, si possono dedurre i corollari seguenti:

1°. *In un prodotto di più fattori si può sostituire ad alquanti fattori il loro prodotto effettuato.*

2°. *Invece di moltiplicare successivamente per dei numeri, si può moltiplicare per il loro prodotto.*

3°. *Dovendo moltiplicare per un prodotto, si può invece moltiplicare successivamente per i singoli fattori.*

4°. *Per moltiplicare un prodotto per un numero, basta moltiplicare uno dei fattori per quel numero.*

5°. *Il prodotto di due potenze della stessa base, anche se frazionaria, è la potenza della stessa base, che ha per esponente la somma degli esponenti.*

Prodotto di una somma per una somma.

268. Teor. *Dovendo moltiplicare una somma per una somma, si può invece moltiplicare le singole parti di un fattore per le singole parti dell' altro e sommare i prodotti parziali.*

Dim. Questo teorema fu già dimostrato per numeri interi; qui si tratta di riconoscere che esso sussiste per numeri qualunque.

Ad es., si debba moltiplicare la somma:

$$\frac{5}{3} + 4 + \frac{2}{3} \quad \text{per la somma} \quad 2 + \frac{6}{5}.$$

Riducendo i termini di ciascun fattore a comun denominatore e sommando, otteniamo:

$$\frac{5 + 12 + 2}{3}, \qquad \frac{10 + 6}{5}.$$

Ora si dovrebbero moltiplicare i numeratori tra loro, e poi i denominatori. Il primo prodotto, essendo i fattori due somme di numeri interi, si può [75] ottenere moltiplicando le singole parti d'una somma per le singole parti dell'altra e sommando i prodotti parziali. Il prodotto delle due somme date è dunque rappresentato dalla frazione:

$$\frac{5 \cdot 10 + 12 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 12 \cdot 6 + 2 \cdot 6}{3 \cdot 5}$$

la quale si può considerare come il risultato della seguente addizione:

$$\frac{5 \cdot 10}{3 \cdot 5} + \frac{12 \cdot 10}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 5} + \frac{12 \cdot 6}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5}.$$

È facile riconoscere [258] nei singoli termini di codesta espressione i prodotti parziali accennati nel teorema, che così resta dimostrato.

269. Oss. Nel teorema precedente il numero delle parti che compongono le due somme è indeterminato, epperò è compreso anche il caso che uno solo dei fattori sia una somma.

270. In base al teorema precedente in pratica, variando il modo di calcolare, si può spesso ottenere più speditamente un prodotto. Ad es., dovendo moltiplicare 12 per la somma $4 + \frac{2}{5}$ si moltiplica 12 separatamente per 4 e per $\frac{2}{5}$; dal secondo prodotto parziale si estraggono gli interi, e così si trova per risultato $52 + \frac{4}{5}$.

Molto spesso, specie nei calcoli mentali, si decompone opportunamente il moltiplicatore in parti. Ad es., dovendo moltiplicare per $\frac{3}{4}$, si imagina di dover moltiplicare per la somma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; ecc.

Divisione per una frazione.

271. Abbiamo veduto che, in seguito all' introduzione delle frazioni, la *divisione* è in ogni caso l' operazione mediante la quale, dato il prodotto di due fattori ed uno di questi, si determina l' altro. Era però sottointeso che uno almeno dei fattori, e per l' appunto il moltiplicatore, fosse un numero intero, perchè non si era ancora considerata la moltiplicazione per una frazione. Ora può accadere che sia dato il prodotto di due frazioni ed una di queste e si debba trovare quell' altra. L'operazione, che vale a tal uopo, qualunque essa sia per essere, si chiamerà *divisione*. E poichè un prodotto è indipendente dall' ordine dei fattori, nel definirla non occorre far cenno se il fattore incognito sia il moltiplicando od il moltiplicatore. Adunque:

272. Def. *La divisione è l' operazione mediante la quale, dato il prodotto di due numeri ed uno di questi, si determina l' altro.*

Il prodotto dato si dirà *dividendo*; il fattore noto *divisore*; l' incognito si chiamerà *quoziente*.

Abbiamo già trattata la divisione d' un intero per un intero e quella d' una frazione per un intero; passiamo a considerare gli altri due casi.

273. Lemma. *Se una cosa è uguale ad* m ennesimi *d' un' altra, questa è uguale ad* n emmesimi *della prima.*

Dim. Infatti, dicendo che una cosa è uguale ad *m ennesimi* di un' altra, si dà a capire che, dividendo la prima in m parti eguali e l' altra in n parti eguali, le parti delle due cose sono poi tutte uguali tra loro. Ma così è manifesto che la seconda si può pensare come composta di n parti eguali ad un *emmesimo* della prima, od in altre parole che è uguale ad n *emmesimi* della prima.

274. Ed ora proponiamoci, ad es., di dividere l' intero 11 per la frazione $\frac{3}{7}$.

Il numero, che cerchiamo, dev' esser [272] tale che, moltiplicato per $\frac{3}{7}$, dia 11. Il numero 11 deve essere [254] adunque i $\frac{3}{7}$ del numero domandato; per conseguenza [273] questo numero è i $\frac{7}{3}$ di 11, e si troverà [254] moltiplicando 11 per $\frac{7}{3}$.

Egli è pertanto:

$$11 : \frac{3}{7} = 11 \cdot \frac{7}{3}.$$

275. Consideriamo infine la divisione di una frazione per un'altra. Proponiamoci, ad es., di dividere $\frac{11}{5}$ per $\frac{3}{7}$.

Il numero, che cerchiamo, moltiplicato per $\frac{3}{7}$, deve [272] dare $\frac{11}{5}$. La frazione $\frac{11}{5}$ deve essere [254] pertanto i $\frac{3}{7}$ del numero domandato; per conseguenza [273] questo numero è i $\frac{7}{3}$ della frazione $\frac{11}{5}$, e si troverà [254] moltiplicando $\frac{11}{5}$ per $\frac{7}{3}$.

Egli è adunque (*):

$$\frac{11}{5} : \frac{3}{7} = \frac{11}{5} \cdot \frac{7}{3}.$$

Regola generale per la divisione.

276. Le regole dei quattro casi di divisione si possono fondere in una sola. Infatti, essendo ad es. [249, 245, 274, 275]:

$$\begin{aligned}
3 : 7 &= \frac{3}{7} = 3 \cdot \frac{1}{7}, \\
\frac{3}{5} : 7 &= \frac{3}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7}, \\
11 : \frac{3}{7} &= \quad\quad = 11 \cdot \frac{7}{3}, \\
\frac{11}{5} : \frac{3}{7} &= \quad\quad = \frac{11}{5} \cdot \frac{7}{3},
\end{aligned}$$

(*) Alla stessa conchinsione si perviene ragionando nel modo seguente.

Poichè la frazione $^{11}/_{5}$ dev'essere il prodotto della frazione $^{3}/_{7}$ per la domandata, se i due termini della prima fossero divisibili rispettivamente per quelli della seconda, facendo le due divisioni, otterremmo i termini della frazione quoziente. [258]. Ma codesta proprietà noi possiamo farla acquistare al dividendo, moltiplicandone i termini per nnmeri convenienti. [213]. Così otteniamo:

$$\frac{11}{5} : \frac{3}{7} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 3 \cdot 7} : \frac{3}{7} = \frac{11 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{11}{5} \cdot \frac{7}{3}.$$

rammentando che un intero si può [222] riguardare come una frazione con denominatore 1, e stabilendo che due frazioni, quali ad es. le due $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{3}$, e le due $\frac{7}{1}$ ed $\frac{1}{7}$, che sono formate dagli stessi numeri, ma scambiati di posto, si dicano ciascuna l'*inversa* dell'altra, conchiudiamo la:

277. Regola. *Per dividere un numero per un altro, si moltiplica il dividendo per l' inverso del divisore.*

278. Cor. Dalla regola precedente risulta che, secondo che il divisore è maggiore, uguale o minore dell' unità, il quoziente è minore, uguale o maggiore del dividendo. [255].

Teoremi sulla divisione.

279. Teor. *Dovendo dividere una somma per un numero, si può dividere per questo numero le singole parti del dividendo, e poi sommare i quozienti parziali.*

Dim. Infatti, poichè, per dividere, ad es., la somma:
$$\frac{3}{4}+11+\frac{7}{5}$$
per $\frac{2}{7}$, bisogna [277] moltiplicare la somma per $\frac{7}{2}$, e questo prodotto si può [269] ottenere moltiplicando le singole parti della somma per $\frac{7}{2}$ e sommando i prodotti parziali, il quoziente si può [277] ottenere dividendo per $\frac{2}{7}$ le singole parti del dividendo e sommando poi i quozienti; per l'appunto c. d. d.

280. Teor. *Per dividere un prodotto per un numero, basta dividere uno dei fattori per questo numero.*

Dim. Ad es., si debba dividere il prodotto $(a \cdot b \cdot c \cdot d)$ per il numero $\frac{2}{7}$. Sappiamo che il quoziente è espresso dal prodotto [277]:
$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \frac{7}{2}.$$

In questo prodotto due fattori qualunque, ad es. i due b e $\frac{7}{2}$, si possono [267, 1°] surrogare col loro prodotto; e questo prodotto equivale poi [277] al quoziente di b per $\frac{2}{7}$. Conchiudiamo che è:

$$\left(a \cdot b \cdot c \cdot d\right) : \frac{2}{7} = a\left(b : \frac{2}{7}\right) c \cdot d.$$

281. Cor. *Per dividere un prodotto per uno dei fattori, basta sopprimere questo fattore.*

Dim. Infatti per dividere, ad es., il prodotto $(a \cdot b \cdot c \cdot d)$ per il numero b, basta [280] dividere per questo divisore il fattore b. E perchè il quoziente di questa divisione è l' unità, e l' unità come fattore si può tralasciare senz' altro, egli è appunto:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d)\; b = a \cdot c \cdot d.$$

282. Teor. *Dovendo dividere un numero per un prodotto, si può dividere successivamente per i singoli fattori.*

Dim. Sappiamo che, per dividere un numero n, ad es., per il prodotto $\left(\frac{2}{3} \cdot 7 \cdot \frac{4}{5}\right)$, bisogna moltiplicare [277] il numero n per il prodotto $\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{4}\right)$, il quale manifestamente [264] è l' inverso del divisore. Ma, invece di moltiplicare n per il prodotto, si può [267, 3°] moltiplicare n per $\frac{3}{2}$, poi il prodotto per $\frac{1}{7}$, e infine il prodotto per $\frac{5}{4}$; e queste moltiplicazioni equivalgono [277] a dividere n per $\frac{2}{3}$, poi il quoziente per 7, ed infine il nuovo quoziente per $\frac{4}{5}$.

Così resta provato che, *ecc.*

283. Teor. *Moltiplicando due numeri per un terzo qualunque, il loro quoziente non muta.*

Dim. Siano due numeri a, b, ed un terzo c qualunque. Dico essere:

$$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c).$$

Sappiamo [282] che, dovendo dividere un numero per il prodotto $(b \cdot c)$, si può dividere prima per c, e poi il risultato per b. Ma dividendo il prodotto $(a \cdot c)$ per c, si ottiene per quoziente a. Rimane dunque da dividere a per b. Così il teorema è dimostrato.

284. Cor. *Dividendo due numeri per un terzo, il loro quoziente non muta.*

Dim. Infatti, dividere per un numero equivale [277] a moltiplicare per il suo inverso, e moltiplicando dividendo e divisore per uno stesso numero il quoziente non muta. [283]. Quindi anche, *ecc.*

285. Oss. Rammentando che una frazione rappresenta il quoziente di una divisione, si riconosce che il teorema: una frazione non muta di valore, se si moltiplicano o si dividono i suoi termini per uno stesso numero, non è che un caso particolare dell' ultimo teorema e del suo corollario, il caso cioè in cui il dividendo, il divisore e il numero per cui i due altri vengono moltiplicati, o divisi, sono numeri interi.

286. Teor. *Il quoziente di due potenze d' una stessa base, anche se questa sia una frazione, è uguale a quella potenza della base stessa, il cui esponente è la differenza tra gli esponenti del dividendo e del divisore.*

Dim. Sia a un numero frazionario. Dico essere, ad es.,: $$a^8 : a^5 = a^{8-5}.$$

Infatti, se nel dividendo a^8 si sostituisce a 5 de'suoi fattori il loro prodotto effettuato [267, 1°], ed ai rimanenti $(8 - 5)$ fattori pure il loro prodotto, il dividendo assume la forma $(a^5 \cdot a^{8-5})$. E così è reso manifesto [281] che, dividendolo per a^5, si ottiene per quoziente a^3.

Esercizi.

92. Dimostrare che aggiungendo nno stesso numero ai termini d'una frazione, si ottiene una frazione che è maggiore della prima, se questa è pura, e minore, se è spuria. (Si consideri quella frazione che, aggiunta o sottratta dalla primitiva, dà per risultato l'unità. [59]).
93. Qual nnmero si deve aggiungere ai due termini della frazione $^6/_7$, affinchè la frazione risultante differisca dall'unità soltanto di $^1/_{1000}$?
94. In qual caso una frazione data si può convertire in una frazione avente per denominatore un dato numero? Ad es., può la frazione $^6/_{15}$ essere convertita in frazione con denominatore 20?
95. Dimostrare che le frazioni:

$$\frac{12}{17}, \qquad \frac{1212}{1717}, \qquad \frac{121212}{171717} \cdots$$

sono equivalenti. (Si osservi che è $121212 = 120000 + 1200 + 12$. Si vede [74] che 121212 è un multiplo di 12, e precisamente il moltiplicatore è ecc.).
96. Dimostrare che le frazioni:

$$\frac{3}{104}, \qquad \frac{3003}{104104}, \qquad \frac{3003003}{104104104}$$

sono eqnivalenti. Osservare un certo modo per dedurre da una frazione altre frazioni equivalenti.
97. Come si ridurrebbero date frazioni ad avere medesimo numeratore? Numeratore comuue minimo.
98. Trasformare le due frazioni $^3/_{10}$, $^{13}/_{17}$ in altre due, tali che il denominatore della prima sia eguale al numeratore della seconda. (Qnesto termine comune deve [216] essere comune multiplo di 10 e 15. Il più opportnno da prendere è il minimo comune multiplo).
99. Trasformare le tre frazioni $^3/_{14}$, $^7/_{30}$, $^{42}/_{17}$ in altre tre, tali che il denominatore di ciascnna sia eguale al numera-

tore della seguente. (Si trasformino intanto le due prime così da sodisfare le condizioni del problema. Poi si operi allo stesso fine sulla seconda e sulla terza. Ecc).

100. Essendo date alquante frazioni, già ridotte a denominatore comune, come si riconosce se esse sono ridotte al minimo comune denominatore? (Basta cercare il massimo comun divisore di tutti i termini delle frazioni date).

101. Dimostrare che, se più frazioni sono eguali, ciascuna di esse è uguale alla frazione, che ha per numeratore la somma dei numeratori, e per denominatore la somma dei denominatori. [216, 73, 213].

102. La somma di due frazioni irreducibili non può essere un numero intero, se non quando i denominatori sono eguali.

CAPITOLO X
FRAZIONI DECIMALI

Preliminari.

287. Si chiamano frazioni *decimali* quelle frazioni il cui denominatore è uno dei numeri 10, 100, 1000, ecc. Tali sono, ad es., le frazioni $\frac{1373}{100}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{402}{1000}$.

Le frazioni decimali godono naturalmente tutte le proprietà di qualunque altra frazione, però con esse il calcolo è più spedito; si deve attribuire questo vantaggio alla facilità con cui si fanno moltiplicazioni e divisioni per i numeri 10, 100, 1000, ecc.

Consideriamo la serie di frazioni:

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}; \quad \frac{1}{10000} \cdots\cdots$$

È manifesto che ciascuna di queste frazioni è decupla di quella che la segue; epperciò si può dire che tra codeste frazioni esiste analoga relazione, che, ad es., tra le cifre del numero 11111, nel quale appunto ciascuna cifra ha valore decuplo di quello della prossima susseguente. E qui, poichè ormai conosciamo frazioni, si presenta spontanea l'idea di prolungare la successione delle cifre dei numeri interi, a destra di quella delle unità, mantenendo la legge che nel passare da un posto a quello a destra il valore di una cifra divenga la decima parte del primitivo. Ma perchè il significato di una cifra si conosce dal confronto del posto che essa occupa rispetto a quello della cifra delle unità, è manifesto che, se si scrivono altre cifre a destra di quella delle unità, è necessario qualche segno, per poter poi conoscere codesta cifra. Il segno, adottato per tale ufficio, è una virgola che si scrive a destra della cifra delle unità.

In virtù di tale convenzione, ad es., il numero 111,1111 significa la stessa cosa che l'espressione:

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000}.$$

Così il numero 32,4703 ha lo stesso significato che l'espressione:

$$30 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{10000}.$$

E possiamo dire in generale che:

288. *Una cifra, che sia a destra della virgola, equivale ad una frazione, il cui numeratore è la cifra stessa, e il denominatore è il numero composto con l'unità e tanti zeri, quante sono le cifre a destra della virgola, fino, inclusivamente, alla cifra che si considera.*

289. Per converso, ad es., la frazione $\frac{7}{1000}$ si può scrivere nel seguente modo: 0,007.

290. Consideriamo ora, ad es., il *numero decimale* (*): 32,084.

Sappiamo intanto che esso equivale alla somma:

$$32 + \frac{8}{100} + \frac{4}{1000}.$$

Riducendo l'intero 32 e la frazione $\frac{8}{100}$ allo stesso denominatore dell'ultima, otteniamo:

$$\frac{32000}{1000} + \frac{80}{1000} + \frac{4}{1000}.$$

(*) Così chiameremo una frazione decimale il cui denominatore non sia scritto, ma sia fatto conoscere mediante la virgola.

Così ora possiamo conchiudere che è:

$$32{,}084 = \frac{32084}{1000}.$$

Nello stesso modo si proverebbe, ad es., essere:

$$0{,}00064 = \frac{64}{100000},$$

$$1{,}48 = \frac{148}{100}.$$

Possiamo quindi enunciare la:

Regola. *Un numero decimale è equivalente alla frazione decimale, che ha per numeratore il numero intero che si ottiene cancellando la virgola nel numero decimale dato, e per denominatore il numero composto con l'unità e tanti zeri, quante sono le cifre decimali del numero dato.*

291. Imaginando scambiati tra loro di posto i due membri di ciascuna delle precedenti eguaglianze, esse poi ci esprimono la seguente:

Regola. *Volendo scrivere una frazione decimale sotto forma di numero decimale, basta scrivere il numeratore, e separare in esso con una virgola tante cifre da destra verso sinistra, quanti sono gli zeri del denominatore. Se poi il numeratore ha meno cifre del denominatore, in tal caso si scrivono prima alla sua sinistra tanti zeri, quanti occorrono perchè si possa separare con la virgola il numero di cifre dovuto.*

292. Per leggere un numero decimale, si legge prima la parte intera, e poi la parte decimale, e questa come se fosse posta sotto forma di frazione decimale.

Così, ad es., il numero 32,014 si legge: 32 *interi* e 14 *millesimi*, appunto perchè è:

$$32{,}014 = 32 + \frac{14}{1000}.$$

Si può anche dire che la parte decimale si legge come fosse un numero intero, e che si fa seguire la denominazione delle unità dell' ultima cifra a destra.

Quando le cifre decimali, che seguono la virgola, sono molte, queste si sogliono dividere in gruppi, ciascuno di tre, partendo dalla virgola. L' ultimo gruppo a destra può constare di due cifre od anche di una sola. Poi si leggono separatamente i singoli gruppi, facendo seguire a ciascuno la denominazione che corrisponde all' ultima sua cifra a destra.

Così, ad es., il numero 32,64820432067 si può leggere: 32 *unità*, 648 *millesimi*, 204 *milionesimi*, 320 *bilionesimi* e 67 *centobilionesimi*.

Si rende ragione di questo modo di leggere, facendo osservare che 6 *decimi* equivalgono a 60 *centesimi*, i quali, sommati coi 4 rappresentati dalla seconda cifra decimale, fanno 64 *centesimi*. Questi equivalgono a 640 *millesimi*, che, sommati con gli 8 *millesimi* rappresentati dalla terza cifra decimale, fanno 648 *millesimi*. E così via.

293. È manifesto che *un numero decimale non muta di valore, se alla destra si scrivono o si sopprimono uno o più zeri*. Così, ad es., i numeri 3,72 e 3,7200 hanno lo stesso valore, dacchè i due zeri del secondo numero, significando non esserci *millesimi*, nè *diecimillesimi*, si possono lasciare o togliere.

Qui giova notare che anche a destra d' un intero si possono scrivere degli *zeri* quasi fossero cifre decimali, purchè però alla destra dell' intero si segni una virgola.

294. Teor. *In un numero decimale una unità di qualsivoglia ordine supera la somma di tutte le unità rappresentate dalle cifre susseguenti.*

Dim. Questa proprietà d'un numero decimale ha la sua ragione in ciò che una unità d'un ordine qualunque vale quanto 10 di quelle dell'ordine prossimo inferiore, dimodochè, ad es., da 1 *centesimo* si possono ricavare 9 *millesimi*, 9 *diecimillesimi*, 9 *centomillesimi*, 9 *milionesimi*, e così in via, indefinitamente.

295. Fondandosi sulla precedente proprietà d'ogni numero decimale, si decide facilmente, dati due numeri decimali, quale è il maggiore.

296. Teor. *Se in un numero decimale si trascurano tutte le cifre decimali che seguono una data cifra, l'errore che si commette è minore di una unità dell'ordine di questa cifra.*

Dim. Ad es., se, invece del numero 2,4832843, si prende il numero 2,48, l'errore che si commette è minore di 0,01, giacchè il numero 2,49, che supera 2,48 di 0,01, supera [294] anche 2,4832843.

Addizione dei numeri decimali.

297. Poichè nei numeri decimali, come nei numeri interi, qualunque cifra esprime unità che valgono ciascuna quanto 10 di quelle dell'ordine prossimo inferiore, l'addizione dei numeri decimali si effettua nello stesso modo che quella dei numeri interi.

Sia proposto, ad es., di trovare la somma dei numeri:

32,047   132   0,0044   e   6,61.

Si scrivono questi numeri uno sotto l'altro in modo che le cifre rappresentanti unità di un medesimo ordine cadano in una stessa colonna. Perchè avvenga questo, basta scrivere gli addendi in modo che le virgole si corrispondano. Fatto ciò, comineeremo ad osservare che nella colonna dei diecimillesimi non ne troviamo che 4; questi si devono scrivere nel posto del totale. Passando alla colonna dei millesimi, ne troviamo 4 e poi 7 che fanno 11, che fanno cioè 1 millesimo da notare, e 10 millesimi, ossia 1 centesimo, che si *porta*; ecc. Quindi la:

32,047
132
0,0044
6,61
170,6614

Regola. *Per fare l' addizione di numeri decimali, si scrivono questi numeri, l' uno sotto l' altro, in modo che le virgole cadono in colonna, e si opera poi come si trattasse di sommare numeri interi. Nella somma si segna la virgola in colonna con le virgole degli addendi.*

Sottrazione dei numeri decimali.

298. Anche la sottrazione dei numeri decimali si eseguisce e si giustifica come quella dei numeri interi.

Ad es., volendo sottrarre 2,04917 da 13,09, si scrive il sottraendo sotto del minuendo in modo che le cifre rappresentanti unità dello stesso ordine si corrispondano; e perchè ciò avvenga basta manifestamente scrivere i numeri in modo che le virgole cadano l' una sotto l'altra.

13,09
2,04917
11,04083

E perchè, nel nostro caso, uno dei numeri ha meno cifre decimali dell' altro, si toglie il difetto scrivendo o imaginando scritti degli zeri nel posto delle cifre che mancano.

Ed ora, cominciando da destra, si dice: 7 più 3 (che si scrive) fanno 10. *Porto* 1 ed 1 (questa è la seconda cifra del sottraendo) fa 2, e 8 (che si scrive) fanno 10. Ecc. Quindi la:

Regola. *Per trovare la differenza di due numeri* *decimali, si scrive il minore sotto del maggiore, in guisa che le virgole cadano in colonna; poi si opera come nella sottrazione dei numeri interi. Si segna in fine la virgola nel resto, in colonna con le virgole dei numeri dati. Se uno dei numeri ha meno cifre decimali dell'altro, si suppone che ci siano degli zeri nel posto delle cifre che mancano.*

Complemento aritmetico.

299. Si dice *complemento aritmetico di un numero decimale* il resto della sottrazione di questo numero da una unità decimale di ordine qualsivoglia; e precisamente si dice complemento al 10, quando il numero dato si sottrae da 10; complemento al 100 sarà il resto della sottrazione del numero dato da 100; ecc. Così, ad es., il complemento al 10 di 0,004 172 è 9,995 828.

Quando si devono eseguire successivamente parecchie addizioni e sottrazioni con numeri decimali, usando del complemento aritmetico si ottiene opportuna uniformità nel calcolo. Vedremo questo in un esempio. Ma prima dimostriamo il:

300. Teor. *Dovendo sottrarre un numero, si può invece aggiungere un suo complemento aritmetico e sottrarre poi dal risultato l'unità sulla quale si è preso il complemento.*

Dim. Sia, ad es., da sottrarre il numero 6,4078 da 45,7, e si prenda del sottraendo il complemento ad una unità decimale qualunque, ad es. a 10. Questo complemento è 3,5922, dimodochè è:

$$6{,}4078 + 3{,}5922 = 10.$$

Ora è manifesto che se, invece di sottrarre 6,4078, si aggiunga al minuendo il complemento 3,5922, poi, per dedurre dal risultato il residuo richiesto, si dovranno sottrarre successivamente il numero dato e il suo complemento, oppure, ciò che torna lo stesso, basterà sottrarre la loro somma 10.

Es. Sia da calcolare il valore dell' espressione:
$$8,0412 - 1,476 + 6,3013 - 0,47713 - 1,48644.$$

$$\begin{array}{r} 8,0412 \\ 8,524 \\ 6,3013 \\ 9,52287 \\ 8,51356 \\ \hline 40,90293 \end{array}$$

In luogo di sottrarre 1,476, si aggiunga 8,524, suo complemento a 10, e si sottragga 10 dal risultato. Altrettanto si dica per ciascuno degli altri sottraendi. Riservandosi di sottrarre infine le unità su cui si son presi i complementi, basterà una sola addizione.

Sottraendo le 3 decine, si ha il cercato valore 10,90293.

Moltiplicazione dei numeri decimali.

301. Proponiamoci, ad es., di moltiplicare 42,0725 per 0,063.

Scrivendo i due numeri dati sotto forma di frazione ordinaria, troviamo di dover moltiplicare:
$$\frac{420725}{10000} \text{ per } \frac{63}{1000}.$$

Così, per la regola di moltiplicazione delle frazioni [258], abbiamo per prodotto:
$$\frac{420725 \cdot 63}{10000 \cdot 1000}.$$

In questa frazione il numeratore è il prodotto dei numeri decimali dati, fatta astrazione dalle virgole; e il denominatore è composto con l' unità e tanti zeri, quante sono le cifre decimali che hanno insieme i due fattori. Epperò, fatta la moltiplicazione indicata nel numeratore, basterà poi [291] separare 7 cifre decimali, perchè tanti sono gli zeri del denominatore. Possiamo quindi conchiudere la:

Regola. *Per fare il prodotto di due numeri decimali, si fa prima il prodotto come non ci fossero virgole; poi si separano a destra del risultato tante cifre, quante sono le cifre decimali che hanno insieme i due fattori.*

Oss. La regola precedente comprende il caso che uno dei fattori sia intero. Lo si riguarda come un fattore, che non ha neanche una cifra decimale.

302. Proponiamoci ora di moltiplicare un numero decimale qualunque per uno dei numeri 10, 100, 1000, ecc. Ad es., sia da moltiplicare 8,409 per 100.

Operando secondo la regola precedente, otteniamo dapprima 840900, e poi 840,900, dove si possono cancellare i due zeri finali. È adunque:

$$8{,}409 \cdot 100 = 840{,}9.$$

Nello stesso modo si trova, ad es., :

$$0{,}7 \cdot 10 = 7$$

$$1{,}4046 \cdot 1000 = 1404{,}6.$$

Quindi la:

Regola. *Per moltiplicare un numero decimale per* 10, 100, 1000, ... , *basta trasportare la virgola rispettivamente di uno, due, tre, . . . posti verso destra.*

303. Poichè la divisione è l'operazione mediante la quale, dato il prodotto ed uno dei fattori, si trova quell'altro, dalla precedente regola si ricava quest'altra:

Regola. *Per dividere un numero decimale per*

10, 100, 1000, . . . , *basta trasportare la virgola rispettivamente di uno, due, tre, . . . posti verso sinistra.*

Ad es., è 123,08 : 100 = 1,2308

4907600 : 10000 = 490,76.

304. Oss. Relativamente alle due ultime regole dobbiamo osservare che, se nel moltiplicando, oppure nel dividendo, non si trovano tante cifre quante devono essere oltrepassate dalla virgola, allora si scrivono a destra del moltiplicando, oppure a sinistra del dividendo, degli zeri in numero conveniente.

Così, ad es., si ha:

12,1 · 1000 = 12,100 · 1000 = 12100

3,4 : 1000 = 0003,4 : 1000 = 0,0034.

Divisione dei numeri decimali.

305. Proponiamoci di dividere 0,81 per 4,8092.

Sappiamo [283] che, se il dividendo e il divisore d' una divisione si moltiplicano per uno stesso numero qualunque, il quoziente non muta. Nel nostro caso, se moltiplichiamo i due numeri dati per 10000, otteniamo per prodotti due numeri interi, che sappiamo poi dividere l'uno per l'altro. Egli è adunque:

0,81 : 4,8092 = 8100 : 48092.

Se avessimo dovuto dividere 7 per 0,41, avremmo moltiplicato i due termini per 100, e trovato:

7 : 0,41 = 700 : 41.

È manifesto che l'operazione si riduce in fondo a rendere uguali mediante zeri i numeri delle cifre decimali del dividendo e divisore (se queste cifre non sono già in egual numero), sopprimere poi le virgole, e dividere l'uno per l'altro i numeri interi così ottenuti. Ripetendo queste conchiusioni, abbiamo la:

Regola. *Per trovare il quoziente di due numeri* *decimali, si fa in guisa che essi abbiano cifre decimali in egual numero, scrivendo all' uopo degli zeri in numero conveniente alla destra del numero che avesse meno cifre decimali. Poi si cancellano le virgole, e si dividono l' uno per l' altro i numeri interi così ottenuti.*

306. La divisione dei numeri interi, a cui si riduce la divisione di due numeri decimali, non conduce ad un quoziente intero, se non quando il dividendo è un multiplo del divisore. In ogni altro caso si trova per quoziente una frazione ordinaria, o pura o spuria. [249]. In pratica avviene che in questo caso si preferisca di aver il quoziente sotto forma di numero decimale, anche a costo che in esso ci sia un errore, purchè però questo errore non sorpassi un certo limite prestabilito. Questo limite dell' errore, o *grado d' approssimazione,* si esprime ordinariamente dicendo che il quoziente deve avere un certo numero di cifre decimali. Quando si dice, ad es., che il quoziente si vuole con tre decimali, si intende dire che si vuole un numero che differisca dal vero quoziente meno di *un millesimo.* Vediamo in qual maniera lo si determini.

Conversione di una frazione ordinaria in decimale.

307. *Convertire una frazione ordinaria in decimale vuol dire trovare un numero decimale, che differisca di meno di una unità dell' ordine della sua ultima cifra dalla frazione ordinaria data.*

Di solito, quando si fa la conversione d' una frazione ordinaria in decimale, è prestabilito quante cifre decimali deve avere il numero che si cerca. Può darsi che codesto numero sia eguale alla frazione data; in tal caso si dice che la conversione si è potuta fare esattamente. Nel caso opposto il numero decimale è un valore approssimato alla frazione data a meno di una unità dell' ordine dell' ultima sua cifra.

308. Per trovare la regola per la conversione d'una frazione ordinaria in decimale, proponiamoci, ad es., di convertire la frazione $\frac{3}{7}$ in un numero decimale con tre cifre decimali.

Imaginando di porre il numero decimale ricercato sotto forma di frazione decimale [290], se indichiamo con x il numeratore, possiamo esprimere la condizione, che deve sodisfare codesto numero x, scrivendo (*):

$$\frac{x}{1000} \leqq \frac{3}{7} < \frac{x+1}{1000}.$$

Moltiplicando i tre numeri per 1000, otteniamo:

$$x \leqq \frac{3}{7} \cdot 1000 < x + 1 ,$$

donde risulta che il numero decimale richiesto, quando si prescinda dalla virgola, è la parte intera del prodotto di $\frac{3}{7}$ per 1000.

Mettendo codesto prodotto sotto la forma:

$$\frac{3 \cdot 1000}{7},$$

e rammentando che [250] una frazione rappresenta il quoziente della divisione del numeratore per il deno-

(*) Per significare che un numero a è minore di un numero b, si scrive: $a < b$, e si legge: a minore di b.

Per significare che a è uguale o minore di b (non maggiore di b). si scrive:

$$a \leqq b.$$

Abbiamo messo tra le due prime frazioni ambidue i segni $=$ e $<$, perchè non sappiamo se la conversione si possa fare esattamente o soltanto per approssimazione.

minatore, troviamo di poter dire che il numero decimale richiesto, quando si prescinda dalla virgola, è il quoziente *intero* della divisione del prodotto (3 · 1000) per 7.

Praticamente l'operazione consiste nello scrivere a destra del numeratore della frazione data tanti zeri, quante sono le cifre decimali che deve avere il numero domandato, dividere poi (in senso ristretto) il numero così formato per il denominatore, e in fine separare alla destra del quoziente *intero* tante cifre decimali, quante ne deve avere il numero decimale che si cerca.

Notiamo infine che si può far di meno di scrivere gli zeri sopra accennati a destra del numeratore (del dividendo), perchè basta scriverli successivamente uno alla volta alla destra dei resti. Ad ognuno di questi zeri (che si cominciano a scrivere quando nel dividendo non ci sono più cifre da calare) corrisponde una cifra decimale del numero domandato. E poichè la cifra dei decimi si ottiene da quel dividendo parziale che si forma scrivendo per la prima volta uno zero alla destra di un resto, si capisce che, quando non ci sono più cifre da calare, si può scrivere la virgola a destra delle cifre già trovate.

Da quanto abbiamo detto possiamo conchiudere la:

309. Regola. *Per convertire una frazione ordinaria in decimale, si divide il numeratore per il denominatore, e si pone una virgola a destra del quoziente. Poi si scrive uno zero alla destra del resto, e si divide il numero, così formato, per il denominatore; il quoziente è la prima cifra decimale. Si scrive uno zero alla destra del nuovo resto, e si divide il numero così ottenuto per* *il denominatore; il quoziente è la seconda cifra decimale. Così si continua finchè si siano calcolate tante cifre decimali, quante sono domandate.* (*).

310. Oss. 1ª. Quando il numeratore della frazione, che si vuol convertire in decimale, è minore del denominatore, la parte intera del numero decimale cercato è *zero*. [99]. In tal caso si scrive uno zero a destra del dividendo, e così si ha il dividendo parziale da cui si ricava la cifra dei decimi (la quale potrebbe essere *zero* anch' essa). Ecc.

311. Oss. 2.ª Nel convertire una frazione ordinaria in decimale può darsi che il resto dell'ultima divisione parziale che si deve fare, perchè il risultato abbia il grado voluto d'approssimazione, sia *zero*. In tal caso il numero decimale trovato è uguale alla frazione data, e la conversione si è potuta fare esattamente.

Può accadere che sia eguale a *zero* un resto antecedente a quell'ultimo a cui si pensava di arrivare.

Potrebbe anche darsi che s'incontrasse un resto nullo, calcolando più cifre delle domandate. In questo caso la conversione si può fare esattamente; ma il numero decimale uguale alla frazione data avrebbe troppe cifre (relativamente alla questione che si tratta) e ci si contenta d'un valore approssimato.

312. La regola, che abbiamo trovata [305] per la divisione con numeri decimali, ci insegna a ridurre la divisione a quella di due interi, e quindi dà il quoziente sotto forma di frazione ordinaria [249], che si potrà poi convertire in decimale seguendo la regola pur ora stabilita.

(*) O, in altre parole: *finchè il numero trovato abbia il grado d'approssimazione richiesto.*

Nel caso che il dividendo sia un numero decimale e il divisore sia intero, invece di pareggiare con zeri le cifre decimali e sopprimere poi le virgole [305], è più semplice in pratica compiere la divisione come si trattasse di numeri interi, mettendo la virgola nel quoziente allorquando si comincia a calare cifre decimali, e scrivendo poi degli zeri a destra dei resti nel caso che, scese tutte le cifre decimali, il quoziente non avesse ancora il grado di approssimazione che si desidera.

Per giustificare questo processo, supponiamo di dover dividere 82,4875 per 592, e che sia chiesto il quoziente con due decimali.

Ponendo il quoziente sotto forma di frazione decimale [290], rappresentando con x il numeratore (che è il numero richiesto, tolta in esso la virgola), possiamo esprimere la condizione che deve sodisfare il numero intero x, scrivendo:

$$\frac{x}{100} \lesseqqgtr 82{,}4875 : 592 < \frac{x+1}{100}.$$

Moltiplicando i tre numeri per 100, abbiamo:

$$x \lesseqqgtr (82{,}4875 : 592)\,100 < x + 1.$$

E perchè moltiplicando il dividendo per un numero, il valore del quoziente riesce moltiplicato per questo numero (*), abbiamo [302] anche:

$$x \lesseqqgtr 8248{,}75 : 592 < x + 1.$$

(*) Abbiamo provato [280] che, dovendo dividere un prodotto per un numero, basta dividere uno dei fattori per questo numero; cosicchè è, ad es.,:

$$(ab) : c = (a : c)\,b.$$

Quest' eguaglianza, tradotta in linguaggio ordinario cominciando dal secondo membro, esprime appunto che: *moltiplicando il dividendo per un numero, il quoziente viene moltiplicato per questo numero.*

Osservando questa relazione, si conchiude che il numero x è il quoziente intero della divisione di 8248 per 592. E perchè infine bisogna tagliare nel numero x due cifre mediante una virgola, si riconosce che nel far la divisione del numero decimale dato per 592, si può metter la virgola nel quoziente, quando non ci sono altre cifre della parte intera da calare. Ad ogni cifra decimale del dividendo, che discende, corrisponde una cifra decimale dello stesso ordine nel quoziente.

Nel nostro caso si trascurano quelle cifre del dividendo che darebbero cifre non chieste per il quoziente; si dovrà invece scrivere degli zeri alla destra dei resti, nel caso che, giunti ad adoperare l'ultima cifra del dividendo, il quoziente non avesse ancora il grado d'approssimazione domandato.

313. Nel caso che il dividendo e il divisore siano decimali, e il dividendo abbia più cifre decimali del divisore, si può ricondurre la divisione al caso precedente, nel quale il divisore soltanto è intero.

Ad es., dovendo dividere 103,60981 per 2,41, si moltiplicano i due numeri per 100 (perchè il divisore ha due cifre decimali [302]). Così il divisore diventa intero, senza che per questo venga alterato il quoziente. [283].

Condizione alla quale deve sodisfare una frazione ordinaria, affinchè si possa convertire esattamente in decimale.

314. Noi abbiamo trovata una regola per convertire una frazione ordinaria in decimale. Ora vedremo come sia facile predire se la conversione si può fare esattamente, e come, nel caso affermativo, si possa predire il numero delle cifre decimali del numero decimale che è uguale alla frazione data.

315. Teor. *Affinchè una frazione irreducibile si possa convertire esattamente in decimale, è necessario e sufficiente che il denominatore non sia divisibile per numeri primi diversi da 2 e da 5.*

Dim. 1°. La condizione enunciata è necessaria. Infatti, se $\frac{a}{b}$ è una frazione irreducibile che si possa convertire esattamente in una frazione decimale, il denominatore di questa frazione decimale, che è un numero scritto con l'unità e zeri, è necessariamente [216] multiplo di b, ossia b divide esattamente codesto numero scritto con l'unità e zeri. Sappiamo poi [179] che, se un numero divide un altro, esso è composto con soli fattori primi del secondo numero. Quindi b non può contenere fattori primi diversi da 2 e 5, che sono i soli fattori primi di qualunque numero scritto con l'unità e zeri. (*).

2°. La condizione è poi sufficiente. Infatti, se il denominatore b non è divisibile per fattori primi diversi da 2 e 5, moltiplicando replicatamente i termini della frazione $\frac{a}{b}$ per 2 o per 5, si può ottenere che il denominatore sia il prodotto di tanti 2 ed altrettanti 5, ossia un numero scritto con l'unità e zeri.

Es. La frazione $\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \cdot 5}$ si può convertire in decimale. Infatti, moltiplicandone i termini due volte per 5, essa diventa:

$$\frac{3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{75}{10^3} = \frac{75}{1000} = 0{,}075.$$

Invece la frazione $\frac{5}{9}$ non si può convertire esattamente in decimale, perchè essa è irreducibile e il denominatore contiene il fattore 3. E per questo nes-

(*) Un numero scritto con l'unità e zeri si può ottenere facendo il prodotto di fattori tutti eguali a 10; ed è $10 = 2 \cdot 5$.

suno dei numeri 10, 100, 1000, ecc. può essere [179] multiplo del denominatore 9.

316. Cor. *Quando una frazione ordinaria irreducibile si può convertire esattamente in numero decimale, questo numero ha tante cifre decimali quante ne indica l'esponente di quello dei fattori 2 e 5 che è dotato di maggior esponente nel denominatore decomposto in fattori primi.*

Dim. Ad es. la frazione $\frac{7}{2^6 \cdot 5^2}$ si può convertire in numero decimale [315] e questo ha sei cifre, perchè 6 è il maggiore degli esponenti dei fattori primi 2 e 5 in cui si vede decomposto il denominatore. Infatti, moltiplicando i termini della frazione quattro volte per 5, il denominatore diventa $10^6 = 1000000$, epperò [291] il numero decimale equivalente alla frazione data ha per l'appunto 6 cifre decimali, c. d. d.

Frazioni decimali periodiche.

317. Si chiama *frazione decimale periodica* una frazione decimale di un numero illimitato di cifre decimali, in cui queste cifre, cominciando da un certo posto, si ripresentano indefinitamente e sempre nel medesimo ordine. Il gruppo di cifre formato da quelle che costantemente si riproducono si chiama *periodo.*

Una frazione periodica si dice *semplice*, quando la cifra dei decimi fa parte del primo periodo; nel caso contrario si dice *mista.* In questo secondo caso le cifre comprese tra la virgola e il primo periodo costituiscono *la parte non periodica*, e il gruppo di cifre da esse formato si dice *antiperiodo.* (*).

(*) Per evitare lungaggini talvolta si dicono periodo ed antiperiodo i numeri rappresentati dai gruppi di cifre che

Es. La frazione decimale 5,41414141 .... è una periodica semplice, il cui periodo è 41. La frazione decimale 0,08061061 .... è una periodica mista: 061 (non 61) è il periodo e 08 l'antiperiodo.

Una frazione decimale periodica si può rappresentare brevemente chiudendo il primo periodo tra parentesi e trascurando gli altri. Così le frazioni periodiche precedenti si possono rappresentare scrivendo: 5,(41) e 0,08(061).

318. Teor. *Qualunque frazione ordinaria, che non si possa convertire esattamente in decimale, se viene convertita in decimale senza limite d'approssimazione, dà origine ad una frazione periodica.*

Dim. Sia $\frac{a}{b}$ una frazione che non si possa convertire in decimale esattamente [315]. Applicando a questa frazione la regola che abbiamo trovata per convertire qualsiasi frazione ordinaria in decimale [309], non può darsi che s'incontri un resto *zero*, perchè in tal caso la frazione $\frac{a}{b}$ si potrebbe convertire esattamente in decimale, e ciò contro l'ipotesi. Per conseguenza la serie dei resti prosegue senza fine.

Ed ora, pensando a quelle divisioni parziali successive che danno le cifre decimali (*), riconosciamo che al più dopo (b — 1) divisioni si deve presentare un dividendo eguale ad un dividendo precedente. Infatti, poichè i resti sono tutti minori del divisore b, e ci sono soltanto (b — 1) numeri minori di b e diversi da *zero*, al più dopo (b — 1) divisioni parziali successive

hanno questi nomi. Naturalmente in questo senso gli zeri che ci fossero a sinistra non avrebbero nessun significato.

(*) Escludiamo dalle nostre considerazioni quelle divisioni parziali con cui si ottengono le cifre della parte intera.

si deve incontrare un resto eguale ad un resto precedente. E da resti eguali si deducono dividendi eguali.

Manifestamente una volta che si sia presentato un dividendo parziale uguale ad un dividendo precedente, le cifre decimali si devono nel seguito riprodurre *periodicamente*.

319. La frazione ordinaria, che dà origine ad una frazione decimale periodica, si chiama la *generatrice* di questa frazione. Ora proveremo che, assunta ad arbitrio una frazione decimale periodica, si può sempre trovare una frazione ordinaria che la produce, quando venga convertita la decimale.

320. Sia, ad es., la frazione periodica semplice $0,(453)$. Ammettiamo che esista una frazione ordinaria, la quale, trasformata in decimali, dia origine alla frazione periodica assunta, e indichiamo con le lettere x ed y rispettivamente il numeratore e il denominatore di codesta frazione.

Ora, pensando al modo in cui si trasforma una frazione ordinaria in decimali [309], troviamo che la frazione $\frac{x}{y}$ dà origine certamente alla periodica $0,(453)$, se gl'interi x ed y sono tali che, dividendo il prodotto $(x \cdot 1000)$ per y, si ottenga 453 per quoziente e lo stesso numero x per resto, nel qual caso ha luogo la relazione [106]:

$$x \cdot 1000 = y \cdot 453 + x. \tag{1}$$

Sottraendo il numero x dai due membri, risulta l'eguaglianza:

$$x \cdot 999 = y \cdot 453, \tag{2}$$

dalla quale, dividendo i due membri per il prodotto $(y \cdot 999)$, si ha [282,281]:

$$\frac{x}{y} = \frac{453}{999}. \tag{3}$$

Ora due interi che verifichino questa eguaglianza, quando siano presi rispettivamente per valori delle lettere x ed y, sono gli stessi 453 e 999. E poichè dall'ultima eguaglianza si può manifestamente risalire alla (2) e poi alla (1), si conchiude che, dividendo il prodotto $(453 \cdot 1000)$ per 999, si ottiene 453 per quoziente e lo stesso numero 453 per resto, donde poi segue che la frazione $\frac{453}{999}$ è la generatrice della periodica 0, (453).

Nello stesso modo, ad es., si troverebbe che la generatrice della periodica 0,(07) è la frazione $\frac{7}{99}$.

Così si è dimostrato che:

321. *Una frazione periodica semplice (senza parte intera) ha per generatrice la frazione ordinaria che ha il numeratore uguale al periodo, e per denominatore il numero composto con tanti 9, quante sono le cifre del periodo.*

322. Può accadere che si possa semplificare la frazione che si forma con la regola precedente, e far perdere al suo denominatore la forma particolare che ha. Ma perchè un numero, che ha 9 per cifra delle unità, non è [145] divisibile nè per 2, nè per 5, e perchè semplificando una frazione si sopprimono, anzichè introdurre fattori comuni ai due termini, troviamo quale:

Cor. *Il denominatore di una frazione irreducibile, generatrice di una frazione periodica semplice, non è divisibile nè per* 2, *nè per* 5.

323. Anche per una periodica mista qualunque esiste sempre una frazione ordinaria che la genera, se vien trasformata in decimali.

Sia, ad es., la frazione periodica mista 0,26(453). Ammettiamo che esista la frazione generatrice e che le lettere x ed y ne rappresentino i due termini.

Ora la frazione $\frac{x}{y}$ dà origine certamente alla periodica mista 0,26(453), se gl'interi x ed y sono tali che, dividendo il prodotto $(x \cdot 100)$ per y, si ottenga 26 per quoziente; e, dividendo il prodotto $(x \cdot 100000)$ per y, si ottenga per quoziente 26453; e le due divisioni diano ambedue medesimo resto. Indicando con r il resto comune alle due divisioni, abbiamo le relazioni [106]:

$$x \cdot 100 = y \cdot 26 + r \qquad (1)$$

$$x \cdot 100000 = y \cdot 26453 + r. \qquad (2)$$

Sottraendo dalla seconda eguaglianza la precedente, risulta [59]:

$$x \cdot 99900 = y\,(26453 - 26) \qquad (3)$$

donde:

$$\frac{x}{y} = \frac{26453 - 26}{99900}. \qquad (4)$$

Ora due interi che verifichino questa eguaglianza, quando siano presi rispettivamente come valori delle lettere x ed y, sono gli stessi termini della seconda frazione. E poichè dalla eguaglianza (4) si può manifestamente risalire alla (3) e quindi (*) dedurne le (1) e (2), conchiudiamo che per qualunque periodica mista esiste sempre una generatrice e per l'appunto che:

Una frazione periodica mista (senza parte intera) ha per generatrice la frazione ordinaria, il cui numeratore si ottiene sottraendo l'antiperiodo dal numero composto con l'antiperiodo ed un periodo. Il denominatore è il numero composto con tanti 9, quante sono le cifre del periodo, e tanti zeri, quante sono le cifre dell'antiperiodo.

(*) Dall'eguaglianza (3) si conchiude essere:

$$x \cdot 100000 - y \cdot 26453 = x \cdot 100 - y \cdot 26.$$

Indicando con r il valor comune delle due differenze, ecc.

324. In una periodica mista l'ultima cifra dell'antiperiodo e l'ultima cifra del periodo non possono essere uguali. Chè infatti, se una periodica mista avesse ad es., 7041 per antiperiodo e 71 per periodo, fosse cioè la seguente 0,7041717171..., l'antiperiodo sarebbe veramente 704 e 17 il periodo.

Ora, poichè le cifre delle unità dei due numeri, la cui differenza è il numeratore della generatrice della frazione periodica mista, non possono essere uguali, il detto numeratore non può essere un numero che finisca per *zero*, epperò non può essere ad un tempo divisibile [193] per 2 e per 5. Quindi, ove si riduca ai minimi termini la frazione generatrice formata secondo la regola trovata [323], l'uno o l'altro dei fattori 2 e 5 resterà necessariamente nel denominatore con esponente uguale al numero degli zeri scritti in seguito alle cifre 9. Così resta dimostrato il:

Cor. *Il denominatore della frazione irreducibile, generatrice di una periodica mista, è divisibile per la potenza di 2 o di 5, che ha esponente uguale al numero delle cifre dell'antiperiodo.*

325. Oss. Dai teoremi 315, 321 e 323, indirettamente, si ricava che:

Una frazione irreducibile, il cui denominatore non sia divisibile nè per 2 nè per 5, convertita in decimale, dà origine ad una frazione periodica semplice. E una frazione irreducibile, il cui denominatore ammetta uno almeno dei fattori 2 e 5, e inoltre altri fattori primi, ridotta in decimale, dà origine ad una frazione periodica mista, nella quale il numero delle cifre dell'antiperiodo è uguale all'esponente della maggior potenza di 2 o di 5, che divide il denominatore della frazione data.

Esercizi.

103. Si dimostri che il prodotto di due frazioni periodiche semplici, minori dell'unità, è una frazione decimale periodica semplice. (I denominatori delle generatrici non ammettono 2 e 5 per divisori, quindi nemmeno il loro prodotto, ecc.).

104. Si trovi il prodotto delle due frazioni periodiche:

$$0,58(338) \qquad 0,0(857142).$$

(Si moltiplino le generatrici).

105. Può il prodotto di due periodiche miste essere un numero decimale finito, oppure una frazione periodica semplice o mista? (Si imaginino decomposti in fattori primi i termini delle generatrici).

106. Si trovi un multiplo di 7, che sia scritto con soli 9. (Si trasformi in decimale una frazione con denominatore 7, ecc.).

107. La differenza tra due periodiche semplici è una periodica semplice.

108. Si converta la frazione $^5/_8$ in una somma di frazioni aventi per denominatore le potenze successive di 3. (Non è che la generalizzazione del problema [308] della trasformazione di una frazione ordinaria in decimale).

109. Si convertano le frazioni $^{17}/_{40}$, $^{17}/_{81}$ ciascuna in una somma di frazioni aventi per denominatore le potenze successive di 12. I due numeri cercati sono essi composti di un numero limitato o di un numero illimitato di frazioni?

CAPITOLO XI

RADICE QUADRATA

Quadrato della somma di due nnmeri.

326. Teor. *Per ottenere il quadrato della somma di due numeri, si può: fare il quadrato della prima parte, il doppio del prodotto delle due parti, il quadrato della seconda parte, e sommare infine i risultati.*

Dim. Siano a e b due numeri qualunque, interi o frazionari. Fare il quadrato della loro somma significa [93] fare il prodotto di due fattori eguali entrambi ad $(a + b)$. Ma sappiamo [268] che, dovendo moltiplicare una somma per una somma, invece di far prima le due addizioni, e poi moltiplicare tra loro i risultati, si può moltiplicare le singole parti del moltiplicando per le singole parti del moltiplicatore, e sommare poi i prodotti. Quindi è:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2.$$

E perchè i due prodotti ab e ba sono eguali [266], la loro somma è il doppio di uno di essi; quindi è infine:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab \cdot 2 + b^2, \qquad \text{c. d. d.}$$

327. Cor. 1°. *Il quadrato di un numero intero è uguale al quadrato delle decine, più il doppio del prodotto delle decine per la cifra delle unità, più il quadrato della cifra delle unità.*

Dim. Sia, ad es., il numero 258. Sostituendo la cifra delle unità con uno zero, si ha 250, che rappresenta [25] le decine del numero dato. Così, essendo:

$$258 = 250 + 8,$$

egli è appunto:

$$258^2 = 250^2 + 250 \cdot 8 \cdot 2 + 8^2.$$

328. Cor. 2°. *La differenza dei quadrati di due interi consecutivi si può ottenere aggiungendo una unità al doppio del minore.*

Dim. Siano, ad es., i due interi consecutivi 36 e 37.

Essendo: $37 = 36 + 1$,

si ha: $37^2 = 36^2 + 36 \cdot 2 + 1$.

Da questa eguaglianza si ricava appunto:

$$37^2 - 36^2 = 36 \cdot 2 + 1.$$

Quadrato di un prodotto.

329. Teor. *Il quadrato di un prodotto è uguale al prodotto dei quadrati dei singoli fattori.*

Dim. Sia, ad es., il prodotto $(3 \cdot 17 \cdot 8)$. Per definizione si ha:

$$(3 \cdot 17 \cdot 8)^2 = (3 \cdot 17 \cdot 8)(3 \cdot 17 \cdot 8).$$

Ma dovendo moltiplicare per un prodotto, si può invece [267, 3°] moltiplicare successivamente per i singoli fattori; quindi è:

$$(3 \cdot 17 \cdot 8)^2 = 3 \cdot 17 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 8.$$

E perchè in un prodotto si può [267, 1°] sostituire ad alquanti fattori il loro prodotto effettuato, abbiamo:

$$(3 \cdot 17 \cdot 8)^2 = (3 \cdot 3)(17 \cdot 17)(8 \cdot 8),$$

ossia $(3 \cdot 17 \cdot 8)^2 = 3^2 \cdot 17^2 \cdot 8^2$, c. d. d.

330. Oss. Fermiamo bene l'attenzione sul seguente modo in cui si può fare il quadrato di un numero intero, perchè in esso troveremo la chiave per risolvere un prossimo importante problema. Prendiamo, ad es., il numero 378; consideriamolo come somma di decine e di unità semplici, e formiamone il quadrato. Lasciando intanto accennate le operazioni, abbiamo [327]:

$$378^2 = 370^2 + 370 \cdot 8 \cdot 2 + 8^2.$$

E perchè le decine 370 si possono considerare come prodotto di 37 (numero [25] delle decine del numero dato) per 10, abbiamo [329]:

$$370^2 = 37^2 \cdot 10^2.$$

E perchè 10^2 è uguale a 100, e per moltiplicare per 100 si scrivono due zeri a destra del moltiplicando, possiamo dire intanto che:

Per fare il quadrato delle decine di un numero, si può fare il quadrato del numero delle decine, e scrivere due zeri a destra del risultato.

331. Passiamo a considerare il doppio del prodotto delle decine per la cifra delle unità. Essendo:

$$\begin{aligned} 370 \cdot 8 \cdot 2 &= (37 \cdot 10)8 \cdot 2 \\ \text{»} \quad &= (37 \cdot 2)8 \cdot 10, \end{aligned}$$

possiamo conchiudere in generale che:

Per ottenere il doppio del prodotto delle decine per la cifra delle unità, si può fare il doppio del numero delle decine, moltiplicarlo per la cifra delle unità, e scrivere poi uno zero a destra del risultato.

Quadrato di una frazione.

332. Teor. *Il quadrato di una frazione è uguale al quoziente dei quadrati dei due termini.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{7}{9}$. Egli è:

$$\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 9} = \frac{7^2}{9^2}.$$

333. Cor. *Il quadrato di una frazione è una frazione.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{47}{62}$, già ridotta ai minimi termini, dimodochè 47 e 62 sono primi tra loro. Il quadrato di questa frazione è intanto $\frac{47^2}{62^2}$. Sappiamo che, se due numeri sono primi tra loro, sono [171] tali anche due loro potenze qualisivogliano; i due termini della frazione $\frac{47^2}{62^2}$ sono dunque primi tra loro, e perciò 47^2 non può esser divisibile per 62^2. Pertanto $\frac{47^2}{62^2}$ è una frazione, c. d. d.

334. Oss. Dalla precedente dimostrazione risulta anche questo che: *Il quadrato d' una frazione irreducibile è una frazione irreducibile.*

Distinzione dei numeri in quadrati perfetti e quadrati non perfetti.

335. Consideriamo la serie dei numeri interi successivi:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 . . .

e quella dei loro quadrati:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 . . .

Prendiamo a considerare un numero intero, che non sia uno di quelli di questa seconda serie, ad es. 7. Manifestamente questo numero non è il quadrato di nessun numero intero; 2 dà un quadrato minore di 7, e 3 dà un quadrato maggiore di 7. E poichè tutte le frazioni comprese tra 2 e 3 (il cui numero è illimitato) danno per quadrati numeri compresi tra 4 e 9, è abbastanza ovvio il pensare che tra queste frazioni ce ne sia una, il cui quadrato sia 7. Ma ciò non può essere, dacchè si è dimostrato che il quadrato di una frazione non può essere un numero intero.

Un numero, come ad es. è 7, che non si possa ottenere nè facendo il quadrato di un numero intero nè quello di una frazione, si dice *quadrato non perfetto*; laddove si dice *quadrato perfetto* ogni numero, che sia il quadrato di un numero intero o di una frazione.

Neanche una frazione irreducibile, i cui termini non siano ambidue quadrati perfetti, non si può ottenere facendo il quadrato di un numero intero o d' una frazione. Sia, ad es., la frazione irreducibile $\frac{20}{49}$, il cui numeratore non è un quadrato perfetto. Questa frazione non si può ottenere facendo il quadrato di un numero intero, perchè il quadrato di un numero intero è un intero. Ammettiamo che possa essere il quadrato di una frazione. Questa frazione, ridotta ai minimi termini ed elevata al quadrato, ci darà una frazione irreducibile [334], la quale, perchè uguale alla frazione $\frac{20}{49}$, parimente irreducibile, dovrà [216] avere 20 per numeratore e 49 per denominatore. Ma allora 20 sarebbe quadrato perfetto, e ciò non è. Dunque una frazione irreducibile, i cui termini non siano ambidue quadrati perfetti, non può essere quadrato perfetto.

Definizione di radice quadrata.

336. Def. *Si chiama radice quadrata di un numero, quel numero che, elevato al quadrato, riproduce il numero proposto.*

Così 8 è la radice quadrata di 64, perchè il quadrato di 8 è 64. La radice quadrata di $\frac{9}{16}$ è $\frac{3}{4}$, perchè, facendo il quadrato di $\frac{3}{4}$, si ottiene appunto $\frac{9}{16}$.

L'operazione, mediante la quale si determina la radice quadrata di un numero, si chiama *estrazione di radice quadrata.* Il numero, sul quale si deve fare questa operazione, si dice *radicando.*

Per significare che 8 è la radice quadrata di 64, si scrive $8 = \sqrt{64}$.

337. La definizione, che abbiamo dato di radice quadrata di un numero, suppone tacitamente che il numero sia quadrato perfetto, giacchè nel caso contrario, non essendovi numero, nè intero nè frazionario, che elevato alla seconda potenza riproduca il numero dato, la radice quadrata di così fatto numero non esiste. (*).

338. Dato un numero a, intero o frazionario, sia esso quadrato perfetto o no, qualunque numero, il cui quadrato sia minore di a, si dice *radice quadrata di* a *per difetto.* E si dice *radice quadrata di* a *per eccesso* qualunque numero, il cui quadrato sia maggiore di a.

Il più piccolo numero, che si conosca, il quale, aggiunto ad una radice quadrata per difetto, fa ottenere una radice per eccesso, o, sottratto da una radice quadrata per eccesso, fa ottenere una radice per difetto, si dice *grado di approssimazione* di quella radice.

Se il numero b è una radice quadrata di a per difetto, ed h è il grado d'approssimazione, il numero b si dice *radice quadrata di* a, *a meno di* h, *per difetto.* Il numero $b + h$ è, in tal caso, una *radice quadrata di* a, *a meno di* h, *per eccesso.*

339. Quando sia chiesta la radice quadrata di un numero che non sia quadrato perfetto, s' intende che si vuole una radice approssimata; ordinariamente è anche prestabilito il grado dell' approssimazione.

(*) Aggiungasi a ciò che, ove pure esistesse, non potremmo definirla dicendo che essa è il numero, che elevato alla seconda potenza riproduce il numero dato, giacchè non abbiamo mai parlato di moltiplicazione con un moltiplicatore che non sia nè intero nè frazionario. E definire una cosa vuol dire indicare tale suo carattere che si possa adoperare per distinguerla da qualunque altra.

Radice quadrata intera.

340. Def. *Si chiama radice quadrata intera di un numero dato il maggior intero il cui quadrato è contenuto nel numero dato.*

341. Teor. *La radice quadrata intera di un numero frazionario è uguale alla radice quadrata intera della parte intera di codesto numero.*

Dim. Sia n un numero frazionario ed a la sua parte intera, dimodochè è:

$$a < n < a + 1.$$

Si vuol dimostrare che la radice quadrata intera di n è uguale alla radice quadrata intera di a.

Rappresentando con r la radice quadrata intera di a, possiamo scrivere [340]:

$$r^2 \leqq a < (r + 1)^2.$$

E poichè $(r + 1)^2$ è uguale o maggiore di $(a + 1)$, abbiamo:

$$r^2 < n < (r + 1)^2,$$

donde risulta che r è la radice quadrata intera di n, come d. d.

342. Oss. Vedremo che, per saper estrarre la radice quadrata con approssimazione prestabilita qualunque da qualsivoglia numero dato, basta saper trovare la radice quadrata intera, il teorema precedente poi mostra che, per saper risolvere questo secondo problema, basta saper trovare la radice quadrata intera di un numero intero.

Estrazione della radice quadrata intera di un numero intero.

343. Finchè il radicando non supera 100, la radice quadrata intera si trova a memoria. Volendo, ad es., la radice quadrata di 68, ci accorgiamo facilmente che 68 è compreso tra 64 ed 81; la radice quadrata di 64 è 8, per conseguenza 8 è la radice richiesta. Sottraendo 64 dal radicando dato, si ha 4 per resto; questo numero si chiama *il resto dell' estrazione di radice.*

344. Passando a considerare il caso di un radicando maggiore di 100, proponiamoci, ad es., di trovare la radice quadrata intera di 5762. Facendo questa ricerca, otterremo di stabilire i teoremi mediante i quali si giustifica la regola per estrarre la radice quadrata intera da qualsivoglia numero dato. [341].

Pensando al modo in cui si può fare il quadrato d' un numero intero, ci giova rammentare che si fa anzitutto il quadrato *del numero delle decine*, o che gli si scrivono poi a destra *due zeri*. [330]. Così, poichè [340] il quadrato della radice quadrata intera di un numero non supera il radicando, il quadrato del numero delle decine della radice non può superare il numero delle centinaia del radicando. Nel nostro caso il quadrato del numero delle decine della radice di 5762 non può superare 57; epperò, essendo 7 la radice quadrata intera di 57, il numero delle decine della radice non può superare 7.

Ma non deve poi essere minore di 7. Infatti, poichè il quadrato di 7 è contenuto in 57, il quadrato di 70 è contenuto necessariamente in 5700, e quindi anche nel numero dato.

La radice, che cerchiamo, non deve [340] adunque essere minore di 70, e dev' essere minore di 80. Per conseguenza il numero delle sue decine è appunto 7.

Le precedenti considerazioni sono generali, epperò possono conchiudere il:

345. Teor. *La radice quadrata intera del nu-*

mero delle centinaia di un numero dato è il numero delle decine della sua radice quadrata intera.

316. Passiamo a vedere come, conoscendo il numero delle decine della radice quadrata intera di 5762, si possa trovare la cifra delle unità.

Sappiamo che il quadrato di un numero, composto di decine e di unità, è formato di tre parti, delle quali la prima è il quadrato delle decine. Questa parte, essendo le decine ormai note, possiamo farla; essa è 4900; sottraiamola dal radicando.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{5762} & 7 \\ \hline 4900 & 14 \\ \hline 862 & \end{array}$$

Il resto 862 deve contenere le altre parti del quadrato, e in particolare il doppio del prodotto delle decine per la cifra delle unità. Questa parte si può formare [331] prendendo 14 (doppio del numero delle decine), moltiplicandolo per la cifra delle unità, ed infine *scrivendo uno zero alla destra del risultato.* Da questa considerazione si conchiude che 86 (numero delle decine del resto) deve contenere *il prodotto del doppio del numero delle decine della radice per la cifra delle unità.*

Se potessimo sapere quante decine si trovano in 86, provenienti dal quadrato della cifra delle unità e dal resto, sottraendo il loro numero da 86, ci resterebbe precisamente il prodotto del doppio del numero delle decine per la cifra delle unità; e allora, dividendo per 14, otterremmo la cifra delle unità.

Non potendo conoscere il numero che si vorrebbe sottrarre da 86, divideremo 86 per 14 (doppio del numero delle decine della radice); ma il quoziente intero potrà essere maggiore della cifra delle unità (appunto perchè si è diviso per 14 un numero che può superare di 14, e anche di più, quello che avremmo dovuto dividere).

Questa conchiusione è importante e ci gioverà enunciarla sotto forma di:

Teor. *Se dal radicando si sottrae il quadrato delle decine della radice intera, e si divide il numero delle decine del resto per il doppio del numero delle decine della radice, si ottiene nel quoziente intero o la cifra delle unità od una cifra maggiore.*

$\sqrt{5762}$	75	
4900	146	145
862	6	5
725	876	725
137		

347. Dividendo 86 per 14, si ha 6 per quoziente intero. Per decidere se la cifra 6 sia buona o invece troppo forte, basta fare il quadrato di 76 e guardare se supera o no il radicando. Se avviene il primo caso, la cifra è troppo grande, e si ripete la prova con la cifra prossima inferiore; se poi il quadrato non supera il radicando, la cifra è la cercata. Ma poichè si è sottratto dal radicando il quadrato delle decine, basta riconoscere se il resto 862 contiene la somma delle altre due parti del quadrato di $(70 + 6)$. Le operazioni per formare questa somma sono indicate nell'espressione seguente:

$70 \cdot 6 \cdot 2 + 6 \cdot 6$ oppure [88]:

$140 \cdot 6 + 6 \cdot 6$ od anche [73]:

$(140 + 6)\, 6$ o finalmente:

$146 \cdot 6.$

Si vede che: *Per riconoscere se il quoziente intero sia o no la cifra delle unità, basta scriverlo a destra* *del doppio del numero delle decine della radice, e moltiplicare il numero così ottenuto per questa cifra, che si assaggia.*

Nel nostro caso il prodotto 876, che ci risulta, supera il resto 862. Ciò prova che la cifra 6 è troppo forte. Facendo la prova con la cifra 5 prossima inferiore, si ottiene per prodotto 725. Questo numero non supera 862, e da ciò si conchiude che 5 è la cifra ricercata.

Sottraendo da 862 il numero 725, abbiamo avuto per resto 137. Ciò vuol dire che il numero proposto non è quadrato perfetto. Il quadrato di 75 è minore di 5762, il quadrato di 76 lo supera; ed è:

$$5762 = 75^2 + 137.$$

348. Sappiamo [345] che, per trovare il numero delle decine d'una radice quadrata intera, basta estrarre la radice quadrata intera dal numero delle centinaia del radicando. Determinato il numero delle decine, sappiamo poi [346, 347] trovare la cifra delle unità. Proponiamoci ora di determinare la radice quadrata intera di un numero qualunque, ad es. di 39648213, e ciò allo intento di stabilire la regola per estrarre la radice quadrata intera da qualsiasi numero dato.

Per semplicità di discorso fingiamo che la radice quadrata intera del numero dato sia 6427. Sappiamo [345] che 642 (numero delle decine della radice) si determina estraendo la radice quadrata intera dal numero delle centinaia del radicando. Dobbiamo adunque separare nel numero dato le due ultime cifre a destra, e prescindere per il momento da queste cifre. Così la difficoltà è ridotta alla ricerca della radice quadrata intera di un numero che ha due cifre di meno del proposto.

Qui da capo possiamo dire che si otterrà 64, numero delle decine della radice intera di 396482, estraendo la radice intera da 3964. Dal numero proposto dobbiamo dunque separare altre due cifre, e troviamo poi di essere da capo per conto del numero che rimane.

Manifestamente, così continuando, si perviene in ogni caso ad un numero di una o due cifre, la cui radice quadrata intera si trova senza difficoltà; e così si ha intanto la prima cifra della radice. Prendendo poi a considerare, in ordine inverso, successivamente, le coppie di cifre che si sono via via abbandonate, ed operando nel modo già noto, che serve a trovare la cifra delle unità d'una radice intera di cui si conosca già il numero delle decine, si ottiene in ultima la radice intera desiderata. Qui sotto si vede sviluppato l'esempio; e non sarà difficile rendersi ragione di tutte le operazioni (giovandosi al bisogno della regola che segue).

$\sqrt{39\vert 64\vert 82\vert 13}$	6296	
36	123	122
364	3	2
244	369	244
12082	1249	
11241	9	
84113	11241	
75516	12586	
8597	6	
	75516	

349. Regola. *Per estrarre la radice quadrata intera da un numero intero:*

1°. *Si separano le cifre di questo numero in cop-*

pie di due cifre, partendo da destra; l'ultima coppia a sinistra potrà essere di una sola cifra.

2°. *Si estrae la radice quadrata intera dalla prima coppia a sinistra, e si ottiene così la prima cifra (a sinistra) della radice.*

3°. *Si sottrae dalla prima coppia il quadrato della cifra trovata, e accanto del resto si scrive la seconda coppia.*

4°. *Si divide il numero delle decine del numero così formato per il doppio della cifra già scritta nel posto della radice; il quoziente intero è la seconda cifra della radice, oppure una cifra troppo forte. Per provare questa cifra, la si scrive a destra del doppio che ha fatto da divisore; si moltiplica il numero, che così viene formato, per la cifra stessa che si assaggia; se il prodotto si può sottrarre dal numero ottenuto calando la seconda coppia, la cifra provata è buona; altrimenti essa è troppo forte. Si sperimenta in tal caso la cifra prossima inferiore, e si seguita, ove occorra, fino a che si ottenga un prodotto che si possa sottrarre.*

5°. *Per continuare, a destra dell'ultimo resto si cala la terza coppia; e si divide il numero delle decine del numero così ottenuto per il doppio del numero già scritto nel posto della radice, e si sperimenta il quoziente intero trovato, prima di scriverlo come terza cifra della radice.*

6°. *Così si continua, finchè tutte le coppie siano state calate.*

7°. *Per prova dell'operazione, si aggiunge l'ultimo resto al quadrato della radice trovata. Deve risultare il radicando.*

Oss. 1ª. Può accadere che una delle divisioni, che si fanno per calcolare la radice quadrata intera di un numero dato, dia *zero* per quoziente intero. Questo *zero* si scrive nella radice, e alla destra dell'ultima coppia calata si scrive una nuova coppia, se ve ne sia, e si continua l'operazione.

Oss. 2ª. Uno dei quozienti interi può essere maggiore di 9. In tal caso la prima cifra da sperimentare è 9.

Oss. 3ª. Nessuno dei resti, che si trovano nell'estrarre la radice quadrata intera da un numero, può superare il doppio della radice trovata fino a quel punto. Consideriamo nel nostro esempio il residuo 841. La radice calcolata, fino a quando si ebbe questo residuo, è 629. Sappiamo che 629 dev'essere la radice di 396482; dimodochè questo numero deve risultare quando si aggiunga 841 al quadrato di 629. Sappiamo che, se al quadrato di un numero si aggiunge il doppio del numero stesso ed una unità, si ottiene il quadrato del numero successivo. Ne segue che, se 841 superasse il doppio di 629, allora 629 non sarebbe più la radice intera di 396482, poichè in questo numero sarebbe contenuto anche il quadrato di 630.

Radice quadrata d'una frazione.

350. Se i termini d'una frazione sono quadrati perfetti, estraendo da essi la radice quadrata, si ottengono i termini d'una frazione, che elevata al quadrato [332] riproduce la frazione data, e che per conseguenza è la radice quadrata di codesta frazione. Così, ad es., la radice quadrata di $\frac{49}{25}$ è $\frac{7}{5}$.

Se la frazione data non ha termini che siano ambidue quadrati perfetti, e non sia irreducibile, si ridurrà ai minimi termini, e così si potrà poi presentare il caso precedente.

Quando soltanto il denominatore d'una frazione irreducibile sia quadrato perfetto, come ad es. è il caso della frazione $\frac{20}{49}$, prendendo la radice quadrata intera del numeratore per numeratore, e la radice del denominatore per denominatore, si ottiene una radice quadrata approssimata per difetto; e il grado d'approssimazione è espresso dalla frazione *semplice*, che ha per denominatore la radice quadrata del denominatore della frazione data. Così, ad es., data la frazione $\frac{20}{49}$, la frazione $\frac{4}{7}$ è una radice quadrata di $\frac{20}{49}$ a meno di $\frac{1}{7}$ per difetto, perchè, mentre il quadrato di $\frac{4}{7}$ è minore di $\frac{20}{49}$, il quadrato di $\frac{5}{7}$ è maggiore.

Se il denominatore d'una frazione data irreducibile non è quadrato perfetto, si può renderlo tale moltiplicando i due termini della frazione per un numero conveniente; in generale, moltiplicando i termini per il denominatore stesso. Così, ad es., data la frazione $\frac{3}{7}$, moltiplicandone i due termini per 7, si ha la frazione $\frac{21}{49}$, della quale $\frac{4}{7}$ è una radice quadrata a meno di $\frac{1}{7}$ per difetto.

Il denominatore della frazione $\frac{5}{12}$ diventa quadrato perfetto, moltiplicando i termini per 3. Così $\frac{3}{6}$, ossia $\frac{1}{2}$, è una radice quadrata di $\frac{5}{12}$ a meno di $\frac{1}{6}$ per difetto.

Estrazione della radice quadrata con approssimazione data.

351. Sapendo estrarre la radice quadrata intera da un intero, dato un numero qualunque, intero o frazionario, si può trovarne la radice quadrata con una approssimazione prestabilita qualunque. Ordinariamente il grado d'approssimazione è espresso da una unità decimale; ma noi, per generalità, prenderemo dapprima una frazione semplice qualunque.

Sia dunque dato un numero a, intero o frazionario, e la frazione semplice $\frac{1}{n}$, dove n rappresenta un numero intero qualunque. Proponiamoci di trovare una frazione, con numeratore che indicheremo con x e con denominatore n, tale che, mentre il suo quadrato non superi a, il quadrato della frazione $\frac{x+1}{n}$, che è uguale ad $\frac{x}{n} + \frac{1}{n}$, sia maggiore di a. Così la frazione $\frac{x}{n}$ è una radice quadrata di a, a meno di $\frac{1}{n}$, per difetto.

Dev'essere adunque [332]:

$$\frac{x^2}{n^2} \lesseqgtr a < \frac{(x+1)^2}{n^2}.$$

Moltiplicando tutti e tre questi numeri per n^2, otteniamo [242]:

$$x^2 \lesseqgtr a \cdot n^2 < (x+1)^2.$$

Codesta relazione fa vedere che il cercato numero intero x è il maggiore il cui quadrato è contenuto nel prodotto $(a \cdot n^2)$, o, in altre parole, che esso è la radice quadrata intera del detto prodotto. Quindi la:

Regola. *Per trovare la radice quadrata a meno di* $\frac{1}{n}$ *per difetto d'un numero* a, *si moltiplica questo numero per il quadrato di* n, *si estrae dal prodotto la radice quadrata intera, e infine si divide per* n *questa radice.*

Es. Volendo, ad es., trovare la radice quadrata a meno $\frac{1}{7}$, per difetto, di $\frac{73}{5}$, si moltiplica questo numero per 49, quadrato di 7; dal prodotto, che è $715 + \frac{2}{5}$, si estrae la radice quadrata intera. Poichè [341] questa è 26, la frazione $\frac{26}{7}$ è la domandata.

352. Quando il numero n considerato nel precedente paragrafo sia uno dei numeri 10, 100, 1000, ecc., e il radicando sia un intero od un numero decimale, la moltiplicazione per n^2 si fa [302] col trasportare nel radicando la virgola verso destra di un numero di posti doppio di quello degli zeri del numero n, e la divisione finale per n si fa [303] separando con una virgola nella radice quadrata intera tante cifre, quanti sono gli zeri di n.

Se il radicando è una frazione ordinaria, giova convertirla prima in decimale, e in questa operazione basta calcolare tante cifre decimali, quante devono poi essere oltrepassate dalla virgola. Il calcolarne di più sarebbe inutile, perchè di cotali cifre non se ne terrebbe poi nessun conto al momento dell'estrazione di radice. [341].

Es. Dovendo, ad es., estrarre la radice quadrata a meno di $\frac{1}{100}$ dalla frazione $\frac{22}{7}$, si converte questa frazione in decimale, spingendo l'operazione fino alla quarta cifra decimale. Poichè si trova:

$$\frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots,$$

e la radice quadrata intera di 31428 è 177, la radice domandata è 1,77; dimodochè si può scrivere:

$$1{,}77^2 < \frac{22}{7} < 1{,}78^2.$$

353. Oss. Dato, ad es., il numero 3,875, perchè se ne estragga la radice quadrata a meno di 0,001, bisogna secondo la regola precedente trasportare la virgola di sei posti verso destra, ed estratta la radice quadrata intera, tagliare tre cifre a destra con la virgola. È palese che per questo basta separare le cifre del numero in coppie partendo dalla virgola e procedendo in ambidue i sensi; porre poi la virgola nella radice quando si son calate tutte le coppie della parte intera, e calar poi coppie di cifre decimali, ed al bisogno scrivere a destra dei resti coppie di zeri, finchè la radice abbia il grado d'approssimazione richiesto.

Esercizi.

111. Dimostrare che un numero intero, la cui cifra delle unità sia una delle cifre 2, 3, 7, 8, non può essere quadrato perfetto. (Si osservi che il quadrato di un numero intero termina con la stessa cifra, che il quadrato della cifra delle unità del numero dato [327]. Si considerino tutti i casi possibili; ecc.).

112. Il quadrato di un numero intero non può terminare con un numero dispari di zeri.

113. Dimostrare che, se un numero intero, che termina per 5, è un quadrato perfetto, la cifra delle decine è 2. (La radice deve terminare per 5; si faccia il quadrato di un numero così fatto, operando secondo il § 327).

114. La condizione necessaria e sufficiente, perchè un numero intero sia il quadrato di un altro numero intero, è questa che tutti i suoi fattori primi abbiano esponenti pari.

115. Un numero intero divisibile per un numero primo, non può essere un quadrato perfetto, se non è divisibile anche per il quadrato di quel numero primo. [**114**].

116. Trovare la condizione a cui devono sodisfare due numeri interi, perchè il loro prodotto sia un quadrato perfetto. (Si suppongano decomposti in fattori primi. [**114**]).

117. Quale è il più piccolo numero intero, per cui si deve moltiplicare 600, per ottenere un prodotto che sia quadrato perfetto? (Si decomponga in fattori. [**114**]).

118. Perchè una frazione sia un quadrato perfetto, è necessario e sufficiente che il prodotto de' suoi termini sia un quadrato perfetto.

119. Trasformare una frazione data in un'altra il cui denominatore sia quadrato perfetto, ed inoltre il più piccolo possibile.

120. La differenza dei quadrati di due numeri interi consecutivi è 55. Quali sono questi numeri? [328].

121. Quale è la frazione che, divisa per la sua inversa, dà $^{25}/_{64}$ per quoziente?

122. Quale è il numero il cui terzo, moltiplicato per la sua metà, dà per prodotto 864? (Che cosa risulta dalla moltiplicazione del terzo di un numero per la sua metà? Dunque 864 è il sesto, ecc.).

123. Valutando in decimali la radice quadrata di un numero che non sia quadrato perfetto, non può risultare una frazione periodica.

124. Che quoziente intero può risultare dalla divisione di un numero intero per la radice quadrata intera?

CAPITOLO XII

RADICE CUBICA

Cubo della somma di due numeri.

354. Teor. *Il cubo della somma di due numeri è composto del cubo del primo, di tre volte il prodotto del quadrato del primo numero per il secondo, di tre volte il prodotto del primo per il quadrato del secondo, e del cubo del secondo.*

Dim. Siano a e b due numeri qualunque, interi o frazionari. Formare il cubo della loro somma significa calcolare il prodotto di tre fattori eguali ad $(a + b)$.

Il prodotto dei due primi fattori è il quadrato di $(a + b)$, e noi sappiamo [326] che è:

$$(a + b)^2 = a^2 + a \cdot b \cdot 2 + b^2.$$

Per ottenere il cubo, resta dunque da moltiplicare il quadrato per $(a + b)$. Ma, dovendo moltiplicare una somma per una somma, invece di far prima le due addizioni e poi la moltiplicazione, si può [268] moltiplicare le singole parti del moltiplicando per ciascuna delle parti del moltiplicatore, e sommare poi i risultati. È dunque:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 = {} & a^2 \cdot a + a \cdot b \cdot 2 \cdot a + b^2 \cdot a \\ & + a^2 \cdot b + a \cdot b \cdot 2 \cdot b + b^2 \cdot b.\end{aligned}$$

E poichè, per moltiplicare un prodotto per un numero, basta moltiplicare [267, 4°] uno dei fattori per quel numero, e perchè [266] si può cambiare l' ordine dei fattori, è pure:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 = {} & a^3 + (a^2 \cdot b)\, 2 + b^2 \cdot a. \\ & + a^2 \cdot b + (b^2 \cdot a)\, 2 + b^3.\end{aligned}$$

Ma se alla somma di due numeri eguali ad $(a^2 \cdot b)$ si aggiunge il numero stesso, risulta il triplo di $(a^2 \cdot b)$; ecc.; perciò infine egli è:

$$(a + b)^3 = a^3 + a^2 \cdot b \cdot 3 + a \cdot b^2 \cdot 3 + b^3.$$

355. Cor. 1°. Dovendo fare il cubo di un numero intero, si può decomporlo in due parti, separando le decine dalla cifra delle unità; poi si otterrà il cubo, sommando: 1°. *il cubo delle decine,* 2°. *il triplo del prodotto del quadrato delle decine per la cifra delle unità,* 3°. *il triplo del prodotto delle decine per il quadrato della cifra delle unità,* 4°. *il cubo della cifra delle unità.*

356. Cor. 2°. *La differenza dei cubi di due numeri interi consecutivi è composta del triplo del quadrato del minore dei due numeri, del triplo di questo numero minore e di uno.*

Infatti egli è, ad es.,:

$$27^3 = (26 + 1)^3 = 26^3 + 26^2 \cdot 3 + 26 \cdot 3 + 1,$$

epperò:

$$27^3 - 26^3 = 26^2 \cdot 3 + 26 \cdot 3 + 1.$$

Cubo di un prodotto.

357. Teor. *Il cubo di un prodotto è uguale al prodotto dei cubi dei fattori.*

Dim. Sia, ad es., il prodotto $(a \cdot b \cdot c)$. È intanto:

$$(a \cdot b \cdot c)^3 = (a \cdot b \cdot c)(a \cdot b \cdot c)(a \cdot b \cdot c).$$

Ma, dovendo moltiplicare per un prodotto, si può [267, 3°] moltiplicare successivamente per i fattori; quindi è:

$$(a \cdot b \cdot c)^3 = a \cdot b \cdot c \cdot a \cdot b \cdot c \cdot a \cdot b \cdot c.$$

E perchè in un prodotto si può [267, 1°] sostituire ad alquanti fattori il loro prodotto effettuato, abbiamo:

$$(a \cdot b \cdot c) = (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b)(c \cdot c \cdot c)$$

$$» \quad = a^3 \cdot b^3 \cdot c^3,$$ c. d. d.

358. Prendiamo ora un numero intero, ad es. 347. Consideriamolo quale somma di due parti, separando le decine [25] dalle unità semplici, ed eleviamolo al cubo, operando secondo la regola che insegna a fare il cubo della somma di due numeri. Otteniamo intanto:
$347^3 = 340^3 + 340^2 \cdot 7 \cdot 3 + 340 \cdot 7^2 \cdot 3 + 7^3.$

Cominciamo a fare il cubo delle decine. Essendo:

$$340 = 34 \cdot 10, \qquad \text{egli è [357]:}$$
$$340^3 = 34^3 \cdot 10^3$$
ossia
$$340^3 = 34^3 \cdot 1000.$$

Per moltiplicare per 1000, si scrivono tre zeri a destra del moltiplicando. Così possiamo dire che:

Per fare il cubo delle decine di un numero, si può fare il cubo del numero delle decine e scrivere tre zeri a destra del risultato.

359. Passiamo a formare il triplo del prodotto del quadrato delle decine per la cifra delle unità. Si ha:

$$340^2 \cdot 7 \cdot 3 = (34 \cdot 10)^2 \cdot 7 \cdot 3$$
$$\text{»} \quad = 34^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10^2$$
$$\text{»} \quad = (34^2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 100.$$

Da questo esempio riconosciamo che:

Per ottenere il triplo del prodotto del quadrato delle decine per la cifra delle unità, si può fare il triplo del quadrato del numero delle decine, moltiplicarlo per la cifra delle unità, e scrivere due zeri alla destra del risultato.

Cubo di una frazione.

360. Teor. *Il cubo di una frazione è uguale al quoziente dei cubi dei due termini.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{7}{9}$. Si ha:

$$\left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{7^3}{9^3}.$$

361. Cor. *Il cubo di una frazione è una frazione.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{47}{62}$, già ridotta ai minimi termini, dimodochè 47 e 62 sono primi tra loro. Il cubo di questa frazione è intanto $\frac{47^3}{62^3}$. Sappiamo [171] che, se due numeri sono primi tra loro, tali sono anche due loro potenze qualisivogliano; i due termini della frazione $\frac{47^3}{62^3}$ sono dunque primi tra loro, e perciò 47^3 non può essere divisibile per 62^3. Pertanto $\frac{47^3}{62^3}$ è una frazione, c. d. d.

362. Oss. Dalla precedente dimostrazione risulta inoltre che: *Il cubo di una frazione irreducibile è una frazione irreducibile.*

Distinzione dei numeri in cubi perfetti e cubi non perfetti.

363. Consideriamo la serie dei numeri interi successivi:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10...

e quella dei loro cubi:

1 8 27 64 125 216 243 512 729 1000...

Prendiamo a considerare un numero intero che non sia di quelli di questa seconda serie, ad es, 20. È palese che questo numero non è il cubo di nessun numero intero; ma non si può neanche ottenerlo elevando al cubo una frazione, giacchè si è dimostrato [361] che il cubo di una frazione non può essere un numero intero. Perciò 20 non è cubo perfetto.

Neanche una frazione irreducibile, i cui termini non siano ambidue cubi perfetti, si può ottenere elevando al cubo un numero intero od una frazione. Infatti, sia ad es. la frazione irreducibile $\frac{40}{27}$, il cui numeratore non è un cubo perfetto. Questa frazione non si può ottenere elevando al cubo un numero intero, perchè il cubo di un numero è un intero. Ammettiamo possa essere il cubo di una frazione. Questa frazione, ridotta ai minimi termini, ed elevata al cubo, ci darà [362] una frazione irreducibile, la quale, perchè uguale alla frazione $\frac{40}{27}$, parimente irreducibile, dovrà [216] avere 40 per numeratore e 27 per denominatore. Ma allora 40 sarebbe cubo perfetto, e ciò non è. Dunque nessuna frazione irreducibile, i cui termini non siano ambidue cubi perfetti, non può essere cubo perfetto.

Definizione di radice cubica.

364. Def. *Si chiama radice cubica di un numero quel numero che, elevato al cubo, riproduce il numero proposto.*

Così 5 è la radice cubica di 125, perchè il cubo di 5 è 125. La radice cubica di $\frac{8}{125}$ è $\frac{2}{5}$, perchè, elevando al cubo $\frac{2}{5}$, si ottiene $\frac{8}{125}$.

Per significare, ad es., che 5 è la radice cubica di 125, si scrive:

$$5 = \sqrt[3]{125}.$$

L'operazione, mediante la quale si determina la radice cubica di un numero, è detta *estrazione della radice cubica.*

365. Oss. La definizione di radice cubica, che abbiamo data, suppone tacitamente che il numero sia cubo perfetto, giacchè nel caso opposto, non essendoci numero che elevato al cubo riproduca il numero dato, la radice cubica di così fatto numero non esiste.

Dato un numero a qualunque, intero o frazionario, sia esso cubo perfetto o no, diremo *radice cubica* *di* a, *per difetto*, qualunque numero il cui cubo sia minore di a. E diremo *radice cubica di* a, *per eccesso*, qualunque numero il cui cubo sia maggiore di a.

Il più piccolo numero, che si conosca, il quale, aggiunto ad una radice cubica per difetto, fa ottenere una radice per eccesso, o, sottratto da una radice cubica per eccesso, fa ottenere una radice per difetto, si dice *grado di approssimazione* di quella radice.

Quando sia chiesta la radice cubica di un numero che non sia cubo perfetto, s' intende che si vuole una radice approssimata; ordinariamente è anche prestabilito il grado dell' approssimazione.

Radice cubica intera.

366. Def. *Si chiama radice cubica intera di un numero dato il maggior intero il cui cubo è contenuto nel numero dato.*

367. Teor. *La radice cubica intera di un numero frazionario è uguale alla radice cubica intera della parte intera di codesto numero.*

Dim. Sia n un numero frazionario ed a la sua parte intera; dimodochè è:

$$a < n < a + 1.$$

Si vuol dimostrare che la radice cubica intera di n è uguale alla radice cubica intera di a.

Rappresentando con r la radice cubica intera di a, possiamo scrivere:

$$r^3 \gtreqless a < (r + 1)^3.$$

E poichè $(r + 1)^3$ è uguale o maggiore di $(a + 1)$, abbiamo:

$$r^3 < n < (r + 1)^3,$$

donde risulta che r è la radice cubica intera di n, come d. d.

368. Oss. Vedremo che, per saper estrarre la radice cubica con approssimazione prestabilita qualunque da qualsivoglia numero dato, basta saper trovare la radice cubica intera. Il teorema precedente poi mostra che, per saper risolvere questo secondo problema, basta saper estrarre la radice cubica intera da un numero intero.

Estrazione della radice cubica intera.

369. Finchè il radicando non supera 1000, la sua radice cubica intera si trova confrontandolo coi cubi dei primi nove numeri interi. Così, ad es., si riconosce che la radice cubica intera di 712 è 8. Sottraendo da 712 il cubo di 8, si ottiene *il resto dell'estrazione di radice.*

370. Allorchè il radicando è maggiore di 1000, la radice cubica intera è composta con due o più cifre. Proponiamoci, ad es., di estrarre la radice cubica intera dal numero 98654, allo intento di stabilire i teoremi, coi quali si giustifica l'estrazione della radice cubica intera di un numero intero qualunque.

Pensando al modo in cui si può formare il cubo d'un intero [355], ci giova rammentare che si fa anzitutto [358] *il cubo del numero delle decine, e che gli scrivono alla destra tre zeri.* Così, poichè il cubo della radice cubica intera non supera il radicando [366], il cubo del numero delle decine di codesta radice non può superare il numero delle migliaia del radicando. Nel nostro caso il cubo del numero delle decine della radice non può dunque superare 98 (numero delle migliaia [24] di 98654). Epperò, essendo 4 la radice cubica intera di 98, il numero delle decine non può superare 4.

Ma non deve poi essere minore di 4. Infatti, poichè il cubo di 4 è contenuto in 98, il cubo di 40 è contenuto [358] in 98000, e quindi anche nel numero dato.

La radice, che cerchiamo, non deve adunque essere minore di 40, ed è minore di 50. Per conseguenza il numero delle decine è appunto 4.

Le precedenti considerazioni sono generali, valgono cioè per qualunque numero intero; così possiamo conchiudere il:

371. Teor. *La radice cubica intera del numero delle migliaia di un numero dato è il numero delle decine della sua radice cubica intera.*

372. Passiamo a vedere come, conoscendo il numero delle decine della radice cubica intera di 98654, si trovi la cifra delle unità.

Sappiamo che il cubo di un numero intero, maggiore di 10, si compone di quattro parti, delle quali la prima è il cubo delle decine. Questa parte, essendo le decine ormai note, possiamo farla; essa è 64000; sottraiamola dal radicando.

Il resto 34654 deve contenere le altre parti del cubo, e in particolare il triplo del prodotto del quadrato delle decine per la cifra delle unità. Questa parte si può formare [359] moltiplicando per 3 il quadrato del numero delle decine, moltiplicando poi il prodotto (che è 48) per la cifra delle unità, e *per ultimo scrivendo due zeri a destra del risultato.* Da tutto ciò conchiudiamo che 346, numero

$$\sqrt[3]{\begin{array}{r} 98654 \\ 64000 \\ \hline 34654 \end{array}} \;\; \begin{array}{|l} 4 \\ \hline 48 \\ \\ \end{array}$$

delle centinaia del resto, deve contenere *il prodotto del triplo del quadrato del numero delle decine della radice per la cifra delle unità.*

Se potessimo conoscere quante centinaia sono portate dalle altre due parti del cubo, e quelle provenienti da ciò che 98654 probabilmente non è un cubo perfetto, sottraendo il numero di queste centinaia da 346, avremmo nel resto per l'appunto il prodotto del triplo del quadrato del numero delle decine per la cifra delle unità. Allora, conoscendo uno dei fattori (il triplo del quadrato del numero delle decine), mediante divisione otterremmo l' altro fattore (la cifra delle unità).

Non potendo conoscere il numero, che vorremmo sottrarre da 346, divideremo 346 per 48 (triplo del quadrato del numero delle decine della radice); ma il quoziente intero potrà essere maggiore della cifra delle unità (appunto perchè si è diviso per 48 un numero che può superare di 48, ed anche di più, quel numero che avremmo dovuto dividere).

Questa conchiusione è importante; ci gioverà enunciarla sotto forma di:

Teor. *Se dal radicando si sottrae il cubo delle decine della radice cubica intera, e si divide il numero delle centinaia del resto per il triplo del quadrato del numero delle decine della radice, si ha nel quoziente intero, o la cifra delle unità, ovvero una cifra maggiore.*

373. Nel nostro caso, dividendo 346 per 48, si trova 7 per quoziente intero.

Per decidere se 7 sia la cifra delle unità, si fa il cubo di 47; se questo cubo non supera il radicando, 7 è la cifra cercata; altrimenti bisogna provare la cifra prossima inferiore. Nel nostro caso, facendo il cubo di 47, si ottiene 103823, numero maggiore del radicando; ciò prova che la cifra 7 è troppo forte. Il cubo di 46 è 97336. Poichè questo numero non supera il radicando, 46 è la radice cubica intera di 98654. E perchè, sottraendo da 98654 il cubo di 46, si ottiene 1318, abbiamo:

$$98654 = 46^3 + 1318.$$

Il numero 1318 è il resto dell'estrazione di radice cubica intera da 98654.

374. Sappiamo [371] che, per trovare il numero delle decine della radice cubica intera di un numero, basta estrarre la radice cubica intera dal numero delle migliaia del radicando. Determinato il numero delle decine, sappiamo [372, 373] poi trovare la cifra delle unità. Proponiamoci ora di determinare la radice cubica intera di un numero qualunque, ad es. di 98654965, e ciò all'intento di stabilire la regola per l'estrazione della radice cubica intera da un numero dato qualsivoglia.

Per semplicità di dire, fingiamo che sia 346 la radice cubica intera che si cerca. Sappiamo che si trova 34, numero delle decine della radice, estraendo la radice cubica intera dal numero delle migliaia del radicando. Dobbiamo dunque separare dal numero dato le tre ultime cifre a destra, e prescindere per il momento da queste cifre.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt[3]{98.654.965} & 462 \\
\quad 64 & 48 \\
\hline
\quad 346 & 6348 \\
\hline
\quad\ \ 13189\ . & \\
\hline
\qquad\ 43837 &
\end{array}$$

Così la difficoltà è ridotta alla ricerca della radice cubica intera di un numero, che ha tre cifre di meno del numero proposto.

Qui da capo possiamo dire che si trova il numero delle decine della radice estraendo la radice cubica intera da 98, numero delle migliaia del radicando 98 654. Dal radicando proposto dobbiamo dunque separare un altro gruppo di tre cifre, poi considerare il numero rimanente, e ripetere su questo le considerazioni fatte sui numeri 98 654 965 e 98 654.

Manifestamente, così continuando, si perviene in ogni caso ad un numero che ha tre cifre o meno, e la cui radice cubica intera si trova senza difficoltà [369]. Prendendo poi a considerare, in ordine inverso, successivamente, i gruppi di tre cifre che si sono via via abbandonati, ed operando nel modo già noto, che serve a trovare la cifra delle unità d' una radice cubica intera di cui si conosce già il numero delle decine, si ottiene in ultima la radice desiderata. Qui a tergo si vede sviluppato l' esempio, e non sarà difficile rendersi ragione di tutte le operazioni (giovandosi al bisogno della regola che segue).

375. Regola. *Per estrarre la radice cubica intera da un numero intero dato:*

1°. *Si separano le cifre in gruppi di tre cifre, partendo da destra. L' ultimo di questi gruppi può constare di due cifre od anche di una sola.*

2°. *Si estrae la radice cubica intera dal numero rappresentato dal primo gruppo a sinistra; con ciò si ottiene la prima cifra a sinistra della radice.*

3°. *Trovata la prima cifra della radice, se ne fa il cubo, e lo si sottrae dal numero rappresentato dal primo gruppo.*

4°. *A destra del residuo si scrive la prima cifra* *del secondo gruppo, e si divide il numero così ottenuto per il triplo del quadrato della prima cifra della radice. Il quoziente intero è la seconda cifra della radice, ovvero una cifra maggiore.*

5°. *Si prova la seconda cifra, scrivendola a destra della prima della radice, e formando il cubo del numero così ottenuto. Se questo cubo si può sottrarre dal numero rappresentato dai due primi gruppi, la cifra che si prova è da ritenere; altrimenti bisogna provare successivamente le cifre inferiori, finchè la sottrazione si possa effettuare.*

6°. *Alla destra del resto si scrive la prima cifra del terzo gruppo, e si divide il numero così formato per il triplo del quadrato del numero rappresentato dalle due prime cifre della radice; il quoziente intero è la terza cifra, ovvero è una cifra troppo forte.*

7°. *Si sperimenta questa terza cifra scrivendola a destra delle altre due già trovate, e facendo il cubo del numero così ottenuto. Se questo cubo si può sottrarre dal numero rappresentato dai primi tre gruppi, la cifra è da ritenere; altrimenti bisogna provare le cifre inferiori.*

8°. *Trovata la terza cifra, con processo affatto analogo si trovano le susseguenti, continuando l' operazione fino a che siano esauriti tutti i gruppi di cifre del radicando.*

376. Possiamo lasciare allo studioso la cura di trovare la regola per l'estrazione della radice cubica con approssimazione data, perchè le considerazioni necessarie a tal uopo sono del tutto analoghe a quelle fatte allo stesso fine per conto della radice quadrata.

CAPITOLO XIII

OPERAZIONI ABBREVIATE

Preliminari.

377. Avviene spesso, nelle applicazioni dell' Aritmetica, che di un valore richiesto basti calcolare un valore decimale approssimato; per questo caso sono utili regole di calcolo a posta, seguendo le quali si risparmia di fare le operazioni che non hanno influsso su quelle cifre del risultato che sono desiderate.

Avviene eziandio, e più frequentemente, che si debbano fare dei calcoli con numeri decimali che sono, o si deggiono riguardare come più o meno affetti da errore. Tali sono, ad es., tutti quei numeri che risultano dalla misurazione di grandezze; numeri affetti necessariamente da errori dovuti all' imperfezione degli strumenti e dei sensi. In questo caso, conteggiando nel modo ordinario, si ottengono risultati nei quali vi sono cifre di dubbia esattezza, e che si devono quindi trascurare per la massima parte, essendo del tutto illusorio il grado di approssimazione che sarebbe fatto credere della loro presenza.

Consideriamo, ad es. di ciò, la moltiplicazione che segue, e supponiamo che l' ultima cifra in ciascuno dei fattori sia dubbia. Tale è perciò l' ultima e forse anche la penultima (alla destra) del prodotto parziale, che si ottiene con la cifra del moltiplicatore d' ordine supremo, epperò, essendo già incerta la quarta decimale del prodotto, è fuor di ragione conservare le cifre degli ordini inferiori, dacchè [294] la loro somma è minore di *un diecimillesimo*. Soltanto, essendo probabile che la detta somma superi $\frac{1}{2}$ *diecimillesimo*, si aumenterebbe in questo caso di *uno* la quarta cifra decimale, e sarebbe quindi 191,4357 il prodotto approssimato da ritenere. Ma intanto vediamo che le cifre, che sono alla destra della linea verticale, per la maggior parte furono calcolate inutilmente.

92,4	6045
2,0	7046
1849209	0
64722	315
369	84180
55	476270
191,4356	633070

Ecco l'importanza di conoscere i metodi abbreviativi a cui abbiamo fatto allusione; essi infatti permettono di calcolare solamente le cifre, che meritano di essere calcolate; e per essi si può anche arguire con quanta approssimazione, nel caso questa sia arbitraria, sono da ricercare i dati di un calcolo, allorchè sia prestabilito il grado di approssimazione che deve avere il risultamento finale.

378. *In ogni numero approssimato si supporrà che l'errore sia minore di una unità dell'ordine dell'ultima cifra, e questo errore potrà essere per eccesso o per difetto.*

In questa ipotesi:

2,018 indica un numero compreso tra 2,017 e 2,019,
172 » » » » » 171 e 173,
0,400 » » » » » 0,399 e 0,401.

In quest'ultimo caso adunque gli zeri *finali* non sono privi d'importanza.

Addizione abbreviata.

379. Siano, ad es., da sommare i seguenti numeri decimali indefiniti:

3,1419..., 0,7149..., 0,00028..., 1,7086..., 2,4113...,

e supponiamo che si voglia la loro somma a meno di un *centesimo*.

Basterà conservare a ciascun addendo tre cifre decimali ed eseguire l'addizione. Nel caso nostro in ciascuno dei numeri si trova un errore, per difetto, minore di 0,001; e perchè gli addendi non sono più di 10, l'errore per difetto della somma è minore di $0,001 \cdot 10 = 0,01$. La vera somma è dunque compresa tra 7,974 e 7,984; e poichè da questi numeri (differenti tra loro di 0,01) è compreso anche il numero 7,98, questo differirà dalla somma anch' esso meno di 0,01; non si può dire per altro se per eccesso o per difetto.

$$\begin{array}{r} 3,141 \\ 0,714 \\ 1,708 \\ 2,411 \\ \hline 7,974 \end{array}$$

Da ciò che precede risulta la:

Regola. *Per ottenere, a meno di una unità di un certo ordine, la somma di non più di dieci numeri, si valuta ciascuno di essi per difetto a meno di una unità dell' ordine immediatamente inferiore a quello che indica il grado d' approssimazione. Fatta l' addizione, si sopprime nel risultato la cifra dell' ordine infimo, e si aumenta di uno la cifra precedente.*

Oss. Quando gli addendi fossero più di dieci e meno di cento, bisognerebbe valutare ciascuno di essi per difetto con due cifre decimali di più di quante sono richieste per la somma. Fatta l'addizione, e soppresse le due ultime cifre alla destra, si dovrebbe poi aumentare di uno la cifra che le precede.

380. Oss. Quando l'approssimazione degli addendi non sia arbitraria, ma data, in tal caso la somma non può essere richiesta con più cifre decimali di quante ne ha quell'addendo che ne ha in minor numero; anzi sarà dubbia (potrà cioè differire dalla vera di più di una unità del suo ordine) anche l'ultima cifra del risultato.

Sottrazione abbreviata.

381. I due termini della sottrazione qui di contro siano approssimati, e, non sapendo in qual senso, consideriamo dapprima il caso che il minuendo sia approssimato per eccesso, ed il sottraendo per difetto. Allora, poichè il minuendo può superare di quasi 0,001 il giusto valore, questo stesso errore si troverà nel residuo; e perchè, sottraendo 3,842, si toglie meno del giusto, di altrettanto si aumenta l'errore nel residuo. In questo può dunque esservi per eccesso un errore di quasi 0,002; epperò si conserva l'ultima cifra, ma scritta in modo distinto dalle rimanenti.

$$\begin{array}{r} 7,329 \\ 3,842 \\ \hline 3,48^{7} \end{array}$$

Se il minuendo sia in difetto ed il sottraendo in eccesso, in tal caso si può affermare che il residuo è approssimato a meno di 0,002 pur difetto.

E quando si sappia che i due termini della sottrazione sono approssimati a meno di 0,001, ambidue per eccesso od ambidue per difetto, in tal caso il residuo sarà approssimato a meno di 0,001; ma non si può asserire se per eccesso o per difetto.

Da ciò che precede risulta la:

Regola. *Per ottenere la differenza di due numeri a meno di una unità di un certo ordine, bisogna valutare* *questi numeri, entrambi per eccesso oppure per difetto, a meno di una unità dell' ordine dato, e calcolar poi la differenza dei due numeri approssimati.*

Moltiplicazione abbreviata.

382. Proponiamoci, ad es., di calcolare a meno di 0,01 il prodotto dei due numeri decimali indefiniti:

321,484748..., 36,7415926...

Osserviamo innanzi tutto che, trascurando la parte del moltiplicatore che segue le cifre scritte, non si commette errore, che abbia influsso sulle cifre del prodotto che sono richieste. Infatti, essendo il moltiplicando minore di 1000, e minore di 0,0000001 la parte non scritta del moltiplicatore, l'errore, che si commette trascurandola, è [294] minore di:

$$1000 \cdot 0{,}0000001,$$

minore dunque di 0,0001. E siamo in fine disposti a tollerare un errore, purchè minore di 0,01.

Nel caso nostro avremo adunque bisogno di calcolare al più 9 prodotti parziali (tante essendo le cifre scritte del moltiplicatore); e poichè questi prodotti non possiamo averli che per approssimazione, dobbiamo [380] procurarceli ciascuno a meno di 0,001.

Consideriamo per primo il prodotto parziale corrispondente alla cifra delle unità del moltiplicatore. È chiaro che, per ottenere questo prodotto a meno di 0,001 per difetto, basterà moltiplicare la parte del moltiplicando che finisce alla cifra dei *diecimillesimi*, trascurando tutte le cifre d'ordine inferiore. Infatti la somma di queste è minore di 0,0001, e l'errore, che si commette nel nostro

$$\begin{array}{r} 321{,}484748\ldots \\ 6 \\ \hline 1928{,}9082 \end{array}$$

caso, è minore di 0,0001 · 6 = 0,0006; in ogni caso è quindi minore di 0,0001 · 9, minore a più forte ragione di 0,001, come si desidera.

Passiamo a considerare il prodotto corrispondente alla cifra delle decine. Poichè in questo caso il moltiplicatore è 30 = 3 · 10, si potrà [267, 3°] moltiplicare prima per 10 e poi per 3. La prima operazione si compie col semplice trasportare la virgola di un posto verso destra; il prodotto 3214,84748... si deve quindi moltiplicare per 3, e in modo da avere il risultato a meno di 0,001. Basterà, come abbiamo già veduto, cominciare la moltiplicazione dalla quarta decimale (cifra che è la quinta nel moltiplicando primitivo); la prima cifra, che risulta dalla moltiplicazione in discorso, esprime *diecimillesimi*, e si deve scrivere in colonna con quella dell'infimo ordine del primo prodotto parziale. L'errore del nuovo risultato è minore di 0,0003, e in ogni caso di 0,0009; minore a più forte ragione di 0,001.

$$\begin{array}{r} 321{,}484748\ldots \\ 36 \\ \hline 1928{,}9082 \\ 9644{,}5422 \end{array}$$

Se nel moltiplicatore ci fosse cifra delle centinaia, analoga argomentazione proverebbe che la cifra dell'ordine infimo del moltiplicando, che si dovrebbe moltiplicare per questa delle centinaia, sarebbe di un posto più a destra di quella adoperata per il prodotto corrispondente alla cifra delle decine.

Passiamo al prodotto parziale corrispondente alla cifra dei decimi. Ora si tratta di moltiplicare per $\frac{7}{10}$, ed il prodotto deve essere calcolato a meno di 0,001. Intanto si dividerà il moltiplicando per 10, ritirando la virgola di un posto verso sinistra; il risultato, che è 32,1484748..., si deve moltiplicare per 7. E, volendosi il prodotto a meno di 0,001, si comincerà dalla quarta decimale (che è la terza nel moltiplicando dato). La prima cifra che si ottiene, poichè esprime *diecimillesimi*, si deve scrivere in colonna con quelle dell' ordine infimo dei prodotti parziali già calcolati. L' errore nel risultato è minore di 0,001.

Così, quando si adoprerà la cifra dei centesimi del moltiplicatore, si dovrà cominciare a moltiplicare la seconda decimale del moltiplicando; e la prima cifra, che si ottiene, andrà scritta, come di solito, in colonna con quelle dell' ordine infimo degli altri prodotti parziali. E così via.

Pertanto, una volta stabilita la cifra del moltiplicando da cui si deve cominciare quando si adopera la cifra delle unità del moltiplicatore, è poi facilissimo conoscere la cifra del moltiplicando da cui bisogna incominciare per ogni altra delle cifre del moltiplicatore. Anzi è manifesto che, rovesciando il moltiplicatore, tenendo ferma la sua cifra delle unità (*), ciascuna delle cifre del moltiplicatore vien a cadere sotto quella del moltiplicando, dalla quale comincia l' operazione per calcolare il prodotto parziale corrispondente.

Abbiamo trovato così che, ogni volta che si passa da una cifra del moltiplicatore a quella dell' ordine prossimo inferiore, il moltiplicando si abbrevia di una cifra. Esso finirà adunque ad essere esaurito; epperò il processo trovato mostra esso stesso da quale

(*) Scrivendone cioè le cifre in ordine opposto, ma in modo che non muti la posizione della cifra delle unità la quale s'intende posta sotto quella cifra del moltiplicando che viene moltiplicata per prima da questa cifra delle unità del moltiplicatore).

cifra in poi il moltiplicatore si può trascurare. Nel nostro caso ciò avviene alla settima decimale; e poichè il moltiplicando è minore di 1000, e la parte che si trascura nel moltiplicatore è minore di 0,0000007, si commette perciò un nuovo errore più piccolo di 0,0007, minore in ogni caso di 0,001.

$$\begin{array}{r}
321{,}484748\ldots \\
\ldots 629514763 \\
\hline
9644{,}5422 \\
1928{,}9082 \\
225{,}0388 \\
12{,}8592 \\
3214 \\
1605 \\
288 \\
6 \\
\hline
11811{,}8597
\end{array}$$

Nel caso adunque che le cifre del moltiplicatore, che entrano nel calcolo, non siano più di 10, il prodotto risultante è approssimato per difetto a meno di

$$0{,}0009 \cdot 10 + 0{,}001,$$

a meno cioè di 0,01. Nel caso nostro il vero prodotto è dunque compreso tra 11811,8597 ed 11811,8697, differenti tra loro di 0,01; epperò 11811,86, che è compreso tra gli stessi numeri, è il prodotto domandato,

Oss. Nel caso che il moltiplicando fosse stato un numero esatto con 5 decimali, il primo dei prodotti parziali sarebbe riuscito esatto, anzichè approssimato. Se il moltiplicando, essendo esatto, avesse avuto 3 cifre decimali soltanto, anche il secondo dei prodotti parziali sarebbe riuscito esatto; si sarebbe poi scritto uno zero nel posto della quarta cifra decimale. Ecc.

Così, se il moltiplicatore non si fosse prolungato a sinistra oltre la cifra 2, e questa fosse esatta, non si sarebbe avuto da considerare l' ultima causa d' errore.

Dall' esempio considerato si ricava la:

Regola. *Per ottenere il prodotto di due numeri de-*

cimali a meno di una unità di un dato ordine, si scrive il moltiplicatore sotto del moltiplicando con le cifre in ordine invertito, e in modo che la cifra delle unità del moltiplicatore cada sotto quella del moltiplicando che è inferiore di due ordini alla cifra che corrisponde al grado di approssimazione domandato; poi si moltiplica per ciascuna cifra del moltiplicatore la parte del moltiplicando che finisce a destra con la cifra che sta sopra quella del moltiplicatore che si considera; si scrivono i prodotti parziali in modo che le loro cifre dell' infimo ordine cadano in colonna; si fa quindi l' addizione; nella somma si sopprimono le due ultime cifre a destra e si aumenta di uno la cifra seguente. Infine si pone la virgola così che il prodotto abbia tante cifre decimali quante ne accenna il grado di approssimazione.

383. La regola per la moltiplicazione abbreviata si può usare per risolvere la seguente questione: *Trovare il prodotto di due numeri approssimati con la maggiore approssimazione possibile e determinare questa approssimazione.*

Ad es., si voglia il prodotto dei due numeri 321,48 e 36,741, approssimati a meno di una unità dell' infimo ordine.

Rappresenteremo le cifre incognite con lettere, scrivendo i fattori nel modo seguente: 321,48*abc..*, 36,741 *pq..*; poi disporremo i numeri per la moltiplicazione abbreviata in modo che le cifre note intervengano nel calcolo in maggior numero che sia possibile. Così il posto della cifra delle unità del moltiplicatore non è più arbitrario, ma determinato. Il prodotto 11810,6 che risulta nel nostro caso, è approssimato a meno di

$$(3 + 6 + 7 + 4 + 2) = 22$$

decimi, epperciò, abbandonando la cifra dei decimi, possiamo poi dire che il prodotto 11810 è approssimato a meno di 28 *decimi*. Invertendo l' ordine dei fattori, si troverebbe lo stesso risultato e si potrebbe poi dire che l'errore è minore di 25 *decimi*.

$$
\begin{array}{r}
321{,}48abc\ldots \\
\underline{qp14763} \\
96444 \\
1928{,}4 \\
2247 \\
128 \\
\underline{3} \\
11810{,}6
\end{array}
$$

Bisogna osservare però che il calcolo dell'errore è fatto nell'ipotesi che i fattori siano ambidue approssimati per difetto. Se l'uno od entrambi fossero approssimati per eccesso, il limite dell' errore sarebbe inferiore a quello che abbiamo trovato.

384. Oss. Nel caso che i due numeri dati abbiano disugual numero di cifre, si dovrà prendere per moltiplicatore il numero che ne ha di più.

Divisione abbreviata.

385. Per il caso in cui i termini di una divisione siano scritti con molte cifre, e sia chiesto il quoziente con data approssimazione, esiste un processo di calcolo molto più spedito dell' ordinario. Fonderemo la dimostrazione della regola per la divisione abbreviata sul seguente:

386. Teor. *La differenza tra due frazioni, che hanno medesimo numeratore e per denominatori due interi consecutivi, è uguale al prodotto che si ottiene moltiplicando una delle frazioni per la frazione semplice che ha denominatore uguale al denominatore dell' altra.*

Dim. Infatti, riducendo a denominatore comune le frazioni:

$$\frac{a}{b}, \qquad \frac{a}{b+1},$$

si ottengono le frazioni:

$$\frac{a(b+1)}{b(b+1)}, \qquad \frac{ab}{b(b+1)},$$

la cui differenza (essendo i numeratori due multipli consecutivi di a) è la frazione:

$$\frac{a}{b(b+1)}.$$

Questa frazione si può considerare come il prodotto delle frazioni:

$$\frac{a}{b}, \qquad \frac{1}{b+1},$$

o come il prodotto delle frazioni:

$$\frac{1}{b}, \qquad \frac{a}{b+1}, \qquad \text{c. d. d.}$$

387. Cor. *Surrogando un divisore decimale, maggiore di 10, con la sua parte intera, in una divisione in cui il quoziente è minore di 10, si produce nel quoziente un aumento che è minore di quell' unità decimale il cui ordine si trova sottraendo 2 dal numero delle cifre della parte intera del divisore.* (*).

Dim. Consideriamo, ad es., il quoziente:

$$n : 48769{,}52$$

dove n rappresenta un intero minore di 10 volte il divisore (dimodochè il quoziente è minore di 10).

(*) Facilmente si può trovare un caso particolare in cui l'errore sia maggiore di quell'unità decimale, il cui ordine si ottiene togliendo 1 soltanto dal numero delle cifre della parte intera del divisore.

Dico che, trascurando nel divisore la parte decimale, si produce nel quoziente un aumento che è minore di una unità decimale del *terzo* ordine, minore cioè di 0,001, appunto perchè, sottraendo 2 dal numero delle cifre della parte intera del divisore, si ottiene 3.

Infatti il quoziente dato è compreso tra le frazioni:

$$\frac{n}{48769}, \qquad \frac{n}{48770},$$

le quali, per la proposizione precedente, differiscono tra loro del prodotto:

$$\frac{n}{48769} \cdot \frac{1}{48770}.$$

Ora, poichè il primo fattore è per ipotesi minore di 10, e il secondo è minore di $\frac{1}{10000}$, il prodotto è minore di:

$$10 \cdot 0{,}0001$$

cioè minore di $\quad 0{,}001 \quad$ c. d. d.

388. Oss. Per il caso che il divisore abbia due sole cifre nella parte intera, la proposizione precedente dice che l'aumento nel quoziente è minore di una unità decimale dell'ordine *zero*. Da queste parole si deve intendere accennata l'unità. E infatti, nel modo stesso dianzi adoperato, dimostreremmo, ad es., essere:

$$\frac{804}{96} - \frac{804}{97} < 1.$$

389. Proponiamoci ora di esprimere in decimali con la maggiore approssimazione possibile il quoziente della divisione di 6481086 per 961753, nell'ipotesi che questi numeri siano ambidue approssimati a meno di una unità.

Intanto, per causa dell' errore del dividendo, nel quoziente c' è un errore, per ecccsso o per difetto, minore [387] della frazione (1 : 961 752). Codesto errore è quindi minore [212] di (1 : 100000), cioè di 0,00001. Nel seguito, per il proposito di tenere in fine calcolo di questo errorc dovuto all' crrore del dividendo, possiamo riguardare il dividendo come numero esatto.

Ora, causa l' errore del divisore, il vero quoziente è compreso, o tra le frazioni:

$$\frac{6481086}{961752} \quad \text{e} \quad \frac{6481086}{961753}$$

o tra le frazioni:

$$\frac{6481086}{961753} \quad \text{e} \quad \frac{6481086}{961754}.$$

In ogni caso adunque l' errore, dovuto all' errore del divisore, è [386] minore di:

$$10 \cdot \frac{1}{100000} \text{ cioè di } 0{,}0001.$$

D'ora in poi, nell'idea di tenerc infine calcolo dell'errore dovuto all'errore del divisore, riguarderemo anche il divisore come numero esatto.

6481086	$96\overset{*}{1}\overset{*}{7}\overset{*}{5}\overset{*}{3}$
5770518	6,7388
710568	
673225	
37343	
28851	
8492	
7688	
804	
768	
36	

961753
88376
5770518
673225
28851
7688
768
36
6481086

Dobbiamo dunque dividere 6481086 per 961753. Il processo ordinario della divisione ci dà intanto la cifra 6, come parte intera del quoziente; alla destra di questa cifra va posta la virgola.

La parte del quoziente, che si deve aggiungere alla parte intera affinc di avere il quoziente completo, è il quoziente della divisione del resto 710568 per il divisore 961753. La regola ordinaria per tradurre codesto quoziente in decimali, consiste in fondo a mettere anzitutto questo quoziente nella forma [309]:

$$(7105680 : 961753) : 10,$$

perchè poi la parte intera del quoziente della divisione indicata tra parentesi è la cifra dei decimi. [279].

Noi possiamo esprimere questa stessa parte complementare del quoziente della divisione proposta, scrivendo [284]:

$$(710568 : 96175{,}3) : 10.$$

E qui, trascurando la parte decimale del divisore posto tra parentesi, e indicando con e l'aumento che ne segue nel quoziente, la nostra espressione si trasforma nella seguente:

$$\{(710568 : 96175) - e\} : 10,$$

e quindi [279] anche nella seguente:

$$(710568 : 96175) : 10 - (e : 10).$$

E perchè l'errore e, dipendente dall'aver trascurato la cifra dei decimi nel divisore 96175,3, è [387] minore di 0,001, l'errore in eccesso (e : 10), che si commette con questa deviazione dalla regola della divisione, è minore di 0,0001.

Così, intendendo di tener calcolo infine del nuovo errore, possiamo dire che la parte complementare del quoziente è indicata esattamente dall'espressione:

$$(710568 : 96175) : 10 = \{ 7 + (37343 : 96175) \} : 10$$
$$= 0{,}7 + (37343 : 96175) : 10.$$

Segnata nel quoziente la cifra dei decimi, possiamo dire che la parte complementare del quoziente, tenuto conto degli errori, è rappresentata esattamente dall' espressione:

$$(37343 : 96175) : 10$$

e quindi anche dalla seguente [282]:

$$(37343 : 9617{,}5) : 100.$$

E rappresentando con e l' aumento nel quoziente chiuso tra parentesi, dovuto all' abbandono della cifra dei decimi del divisore, abbiamo:

$$\{ (37343 : 9617) - e \} : 100,$$

ossia [279]:

$$(37343 : 9617) : 100 - (e : 100).$$

E perchè l' errore e è [387] minore di 0,01, l' errore in eccesso, che si commette trascurando il termine $(e : 100)$, è minore di nuovo di 0,0001.

Ormai è palese che, seguitando la divisione in questo modo, cioè dividendo ciascuna volta il resto dell' ultima divisione parziale per il *divisore abbreviato d' una cifra* (*), si commette ogni volta un nuovo errore minore di 0,0001.

Manifestamente arriva l' istante in cui, pur essendo rimaste cifre del divisore, la divisione non può esser proseguita, perchè l' errore totale già commesso è dello stesso ordine della nuova cifra che risulterebbe nel quoziente, per la qual cosa codesta cifra farebbe poi credere che il quoziente avesse un grado d' approssimazione maggiore del vero.

(*) E così, invece di scrivere uno zero alla destra del resto e dividere il numero, che ne risulta, per il divisore.

Nel nostro caso codesta cifra, che farebbe credere una approssimazione maggiore di quella che si può asserire, è la quinta che abbiamo calcolata, quella che esprime *diecimillesimi*. Infatti, poichè degli errori successivamente commessi non abbiamo potuto dire altro che ciascuno è minore di 0,0001, la cifra dei *diecimillesimi* è assolutamente incertà.

È invece esatta (nel senso dei numeri approssimati) la terza cifra decimale, perchè si può asserire che l' errore totale è minore di 0,001. Infatti, poichè la somma degli errori per eccesso, dovuti a ciò che si sono trascurate successivamente le cifre del divisore, è minore di 0,0009, e l' errore per difetto, che si commette trascurando la quarta cifra decimale e la frazione complementare è minore di 10 *diecimillesimi*, l' error finale nel quoziente, per eccesso o per difetto, è minore di 10 *diecimillesimi*, ossia di 0,001.

Conchiudiamo che il quoziente della divisione dei due numeri approssimati 6481086 e 961753 è il numero 6,738 approssimato a meno di una unità dell' infimo ordine.

390. Abbiamo trattato il caso della divisione di due numeri interi approssimati, il cui quoziente sia compreso tra 1 e 10. A questo caso si può ridurre ogni altro. Infatti, dovendo ad es. dividere l' un per l' altro i numeri approssimati 9324,815 e 815,37, trasportando le virgole di due posti a destra, riduciamo la divisione a quella dei numeri 932481,5 e 81537. Ora, dividendo il dividendo per 10, e trascurando poi la parte decimale del dividendo, resterebbe da dividere l' un per l' altro i numeri interi approssimati 93248 e 81537, il cui quoziente è compreso tra 1 e 10. In fine bisognerebbe moltiplicare per 10 il quoziente trovato con la divisione abbreviata, perchè, col dividere il dividendo per 10, si è diviso per 10 il quoziente. [280].

391. Le precedenti considcrazioni ci permettono di conchiudcre che, quando il divisore è un numcro approssimato, non si può domandare il quoziente che con *due* cifre di meno del divisore. Perciò, quando si dovessero dividere l'un per l'altro due numeri decimali indefiniti e fosse prestabilito il grado d'approssimazione del quoziente, dal confronto dei numeri dati si conchiuderebbe quante cifre deve avere il quozientc. Se n è questo numero, $n + 2$ sarebbe il numero delle cifre del primo divisore abbreviato. Il primo dividendo abbreviato sarcbbe poi il più piccolo numero tagliato a sinistra del dividendo che contiene il divisorc.

Es. Dovcndosi calcolare a meno di 0,001 (cioè con trc cifre decimali) il quoziente della divisione dei numeri decimali indefiniti 1161,7879 . . . . e 321,454545 . . . . , si comincia a determinare il numero delle cifre del quoziente; il che si fa moltiplicando il divisore per 10, 100, ecc. Nel caso presente si riconosce che il quoziente ha due cifre nella parte intera, e quindi cinque cifre in tutto. Perciò il primo divisore abbreviato ha sette cifre ; quindi è il numero 321,4545. Il primo dividendo abbreviato è 11617,879.

Si può dunque imaginare di dover dividere:

116178790 per 3214545.

Dividendo il dividendo per 10 (cioè sopprimendo in esso lo zero a destra) il quoziente vien diviso per 10. Quindi, trovato con la divisione abbreviata il quoziente della divisione di 11617879 per 3214545, bisognerà moltiplicare il quoziente per 10. Con la divisione abbreviata si trova 3,6141; epperò 36.141 è il quoziente domandato, a meno di 0,001.

Da tutto quanto precede ora possiamo conchiudere la:

392. Regola. *Per trovare il quoziente di due numeri decimali indefiniti a meno di una unità decimale data*:

Si determina il numero delle cifre che deve avere il quoziente.

Si separano a sinistra del divisore tante cifre, quante sono quelle del quoziente più due, e si trascurano tutte le altre. Così si ottiene il primo divisore.

Si forma il dividendo abbreviato separando a sinistra del dividendo tante cifre quante bastano a rappresentare un numero che contenga il divisore, e si trascurano tutte le altre.

Si divide il dividendo abbreviato per il primo divisore, senza badare alle virgole. Così si ottiene la prima cifra del quoziente.

Si divide il resto per il numero che si ottiene dal divisore sopprimendo l' ultima sua cifra a destra, e così si ottiene la seconda cifra del quoziente.

Così si continua, sopprimendo una alla volta le cifre del divisore, finchè il quoziente abbia il numero di cifre prestabilito.

Infine si segna la virgola nel quoziente, in modo che l' ultima cifra esprima la voluta approssimazione.

Oss. Nel fare la divisione abbreviata, col metodo esposto, può avvenire che una delle divisioni parziali dia 10. In tal caso si scrivono nel quoziente tanti 9, quante cifre mancano per ottenerne il numero prestabilito.

CAPITOLO XIV

NUMERI COMPLESSI

Preliminari.

393. Per talune specie di grandezze, certe parti aliquote dell' unità, e spesso anche certi multipli dell' unità hanno nomi particolari. Ad es., se consideriamo il *giorno*, il multiplo d' un giorno secondo il numero 7 ha nome *settimana*; la parte aliquota secondo il numero 24, cioè $\frac{1}{24}$ d' un giorno, si dice *ora*. Un *sessantesimo* di ora, che a sua volta è esso pure una certa parte aliquota d' un giorno, si dice *minuto*; $\frac{1}{60}$ di minuto si dice *secondo*. Perciò, ad es., invece di dire: 4 *ore e* $\frac{13}{60}$ (di ora), si può dire 4 *ore e* 13 *minuti*.

Così fatte espressioni, che indicano somme d'unità e di parti aliquote d'unità, alle quali ultime sia data la *denominazione* con una parola convenzionale, anzichè col numero che indica in quante parti l' unità fu divisa, si dicono *numeri complessi*.

Ora risolveremo, per via d' esempi, i principali problemi sui numeri complessi. Non si tratta altro che di applicazioni delle regole stabilite precedentemente; le questioni sono anche più facili di altre già risolute, perchè meno astratte.

Dopo l' introduzione del sistema metrico decimale la teoria dei numeri complessi avrebbe perduta ogni importanza, se non fosse ovunque rimasta l' antica divisione del tempo e del cerchio. Avviene poi talvolta che si debbano rivangare misure antiche; ma la risoluzione di questioni ad esse relative non presenta nessuna difficoltà a chi abbia visto come si trattino i principali problemi sui due tipi accennati. Perciò i nostri esempi si riferiranno sempre a misure del tempo e del cerchio.

394. L'unità di tempo è il *giorno* (medio). Il giorno si divide in 24 parti eguali che si dicono *ore*; l'ora si divide in 60 *minuti*, ed il minuto in 60 *secondi*. Intervalli di tempo minori di un secondo si esprimono con frazioni decimali di secondo.

Il numero complesso: 3 *giorni*, 8 *ore*, 17 *minuti*, 14 *secondi*, si rappresenta per iscritto nel modo seguente:

$$3^g \quad 8^h \quad 17^m \quad 14^s.$$

395. L'unità di misura degli archi d'un cerchio è il quarto del cerchio o il *quadrante*. Il quadrante si divide in 90 *gradi*; il grado in 60 *minuti*, ed il minuto in 60 *secondi*. Archi minori d'un secondo si esprimono con frazioni decimali.

Il numero complesso: 48 *gradi*, 18 *primi*, 45 *secondi e* 6 *decimi di secondo* si rappresenta per iscritto nel seguente modo:

$$48^\circ \quad 18' \quad 45'',6.$$

396. In un numero complesso un'unità e quelle sue parti aliquote, che hanno nomi particolari, si dicono unità dei vari ordini. Ciascuna unità (che non sia quella dell'infimo ordine) è multipla secondo un determinato numero dell'unità dell'ordine prossimo inferiore.

Trasformazioni di numeri complessi.

397. Probl. *Convertire in secondi il numero complesso:*

$$7^g \quad 4^h \quad 31^m \quad 14^s.$$

Risol. La questione non presenta nessuna difficoltà. Si trova:

$$7^g \quad 4^h \quad 31^m \quad 14^s = 621074^s.$$

398. Probl. *Convertire* 621074^s *in numero complesso.*

Risol. Si divide (in senso ristretto) 621074 per 60, perchè 60 secondi fanno un minuto. Essendo 10351 il quoziente e 14 il resto, si conchiude intanto che è:

$$621074^s = 10351^m \quad 14^s.$$

Proseguendo analogamente, si trova infine:

$$621074^s = 7^g \quad 4^h \quad 31^m \quad 14^s.$$

399. Probl. *Convertire il numero complesso* 7^g 4^h 31^m 14^s *in frazione di un giorno.*

Risol. Anzitutto bisogna convertire il numero complesso in unità di quell'infima specie che si presenta nel numero dato. Nel nostro caso si trova:

$$7^g \quad 4^h \quad 31^m \quad 14^s = 621074^s.$$

Poi si determina quale frazione di un giorno è un secondo. Poichè un giorno equivale a:

$$24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$$

secondi, un secondo è $\frac{1}{86400}$ di un giorno. Conseguentemente egli è:

$$7^g \quad 4^h \quad 31^m \quad 14^s = \left(\frac{621074}{86400}\right)^g.$$

400. Probl. *Convertire la frazione* $\frac{621074}{86400}$ *di un giorno in numero complesso.*

Risol. Sappiamo [250] che una frazione è uguale al quoziente della divisione del numeratore per il denominatore, dimodochè, ad es., $\frac{5}{7}$ di un giorno equivalgono ad *una settima* parte di 5 giorni. Perciò nel nostro caso possiamo scrivere:

$$\left(\frac{621074}{86400}\right)^{g} = \frac{621074^{g}}{86400},$$

dove la linea di frazione del secondo membro tien luogo del segno di divisione, cosicchè la seconda frazione si deve interpretare come fosse scritto:

$$621074^{g} : 86400.$$

Ora, poichè dividendo 621074 per 86400 si trova 7 per quoziente e 16274 per resto, abbiamo:

$$\left(\frac{621074}{86400}\right)^{g} = 7^{g} + \frac{16274^{g}}{86400}$$

$$» \qquad = 7^{g} + \frac{390576^{h}}{86400}.$$

(Si sono convertiti i 16274 giorni in ore).

Dividendo 390576 per 86400, si trova 4 per quoziente e 44976 per resto. Per conseguenza egli è:

$$\left(\frac{621074}{86400}\right)^{g} = 7^{g}\ 4^{h} + \frac{44976^{h}}{86400}$$

$$» \qquad = 7^{g}\ 4^{h} + \frac{2698560^{m}}{86400}.$$

(Si sono convertite le ore in minuti).

Proseguendo analogamente, si ha in fine:

$$\left(\frac{621074}{86400}\right)^{g} = 7^{g}\quad 4^{h}\quad 31^{m}\quad 14^{s}.$$

401. Probl. *Convertire il numero complesso* 7^{g} 4^{h} 31^{m} 14^{s} *in frazione decimale di un giorno.*

Risol. Si converte il numero dato in frazione ordinaria di un giorno, e poi questa frazione in frazione decimale. Generalmente non si potrà ottenere altro che un valore approssimato.

Nel nostro caso, lasciando in disparte i 7^g, si trova:

$$4^h\ 31^m\ 14^s = \left(\frac{16274}{86400}\right)^g$$
$$\text{»} \qquad = 0^g,1883$$

epperò:

$$7^g\ 4^h\ 31^m\ 14^s = 7^g,1883$$

con un errore minore di 0,0001.

402. Probl. *Convertire* $7^g,1883$ *in numero complesso.*

Risol. La questione è di convertire in numero complesso la frazione $\frac{71883}{10000}$. È un problema che abbiamo già risoluto [400]. Nel caso presente, attesa la somma facilità con cui si trovano quoziente e resto quando il divisore è una potenza di 10, l'operazione riesce molto spedita. Si trova:

$$7^g,1883 = 7^g\ 4^h\ 31^m\ 9^s,12.$$

Operazioni con numeri complessi.

403. Abbiamo imparato a convertire un numero complesso in frazione ordinaria o decimale, ed anche ad eseguire l'operazione inversa. Ne segue che le operazioni sui numeri complessi si possono ricondurre a quelle con numeri frazionari.

L'addizione però e la sottrazione si possono effettuare direttamente coi numeri dati, senza nessuna difficoltà; e così anche la moltiplicazione e la divisione, purchè il moltiplicando e il divisore siano numeri interi.

104. Probl. *Si determini la somma dei seguenti intervalli di tempo:*

$7^g\ 12^h\ 42^s$; $14^h\ 50^m\ 38^s$; $5^g\ 3^m\ 14^s$.

Risol. Si dispongono i numeri per l'addizione nel modo seguente:

Giorni	Ore	Minuti	Secondi
7	12	0	42
	14	50	38
5	0	3	14
13	2	54	34.

Si principia a far la somma delle unità dell'infima specie. Si trovano 94 secondi, dei quali 34 si devono notare; gli altri 60 formano un minuto. che si porta, per aggiungerlo alla somma dei minuti. Poichè risultano 54 minuti, che non bastano a formare un'ora, si scrive 54 nella colonna dei minuti. Poi si trovano 26 ore, delle quali 2 si devono scrivere; le altre 24 danno un giorno, che si aggiunge alla somma dei giorni.

Oss. È manifesta l'analogia con l'addizione dei numeri decimali; la maggiore difficoltà dipende da ciò, che dalle somme parziali non si possono ricavare con altrettanta speditezza le unità d'ordine superiore.

105. Probl. *Si sottraggano* $2^g\ 54^m\ 14^s$ *da* $9^g\ 7^h\ 8^s$.

Risol. Si dispongono i numeri, il sottraendo sotto del minuendo, in modo che le unità della stessa specie si corrispondano:

Giorni	Ore	Minuti	Secondi
9	7	0	8
2	0	54	14
7	6	5	54.

Poichè da 8 secondi non si possono sottrarre 14 secondi, si aggiunga nel posto dei secondi una unità della specie superiore, un minuto, cioè 60^s. Da 68^s togliendo 14^s restano 54^s. Per compenso si sottrarranno 55 minuti invece che 54, ecc.

Per altro esempio si sottraggano $15^h\ 38^m\ 18^s$ da 2 giorni.

In questo caso, nell'atto di scrivere il minuendo, giova decomporre un giorno in ore, poi un'ora in minuti, ed un minuto in secondi. Così la sottrazione si rende semplice affatto.

Giorni	Ore	Minuti	Secondi
1	23	59	60
	15	38	18
1	8	21	42.

406. Probl. *Si determini il quintuplo del seguente intervallo di tempo*: $3^g\ 54^m\ 23^s$.

Risol. Si dispone l'operazione come segue:

Giorni	Ore	Minuti	Secondi
3	0	54	23
			5
15	4	31	55.

Si comincia a moltiplicare per 5 i 23^s. Si ottengono 115^s, equivalenti a 55^s (che si scrivono) ed un minuto, che si porta, per aggiungerlo al prodotto dei minuti per 5. Poichè risultano 271 minuti, e questi equivalgono a 4^h e 31^m, così si notano i 31^m, e si portano le 4^h. Queste 4^h si devono notare anch'esse, perchè il moltiplicando non dà altre ore. Si ottengono poi infine 15^g.

407. Probl. *La punta della lancetta minore di un orologio (non regolato) descrive in un'ora un arco di cerchio della lunghezza di* 42° 32′ 15″. *Che parte* *di cerchio descriverebbe, ove il movimento durasse per* $16^h\ 24^m\ 38^s$?

Risol. Si converta il numero complesso $42°\ 32'\ 15''$ in unità dell'infimo ordine. Si trova:

$$42°\ 32'\ 15'' = 153135''.$$

Si converta il numero complesso $16^h\ 24^m\ 38^s$ in frazione di ora. Si trova:

$$16^h\ 24^m\ 38^s = \left(\frac{59078}{3600}\right)^h.$$

Manifestamente, per ottenere il numero dei secondi percorsi nella frazione $\frac{59078}{3600}$ di ora, si deve moltiplicare 153135 per $\frac{59078}{3600}$. Moltiplicando, si ottiene per risultato approssimativo 2513030. Questo numero esprime quanti secondi di cerchio sono percorsi dalla punta della lancetta in $16^h\ 24^m\ 38^s$.

Convertendo il numero $2513030''$ in gradi, minuti e secondi, si trova:

$$2513030'' = 698°\ 3'\ 50''.$$

E poichè 360° costituiscono un intero cerchio, nelle $16^h\ 24^m\ 38^s$ la punta della lancetta descrive un intero giro, più $338°\ 3'\ 50''$.

408. Probl. *Calcolare la nona parte dell'intervallo di tempo* $67^h\ 51^m\ 53^s$.

Risol. Si comincia a prendere un nono di 67 ore. Esso è composto di 7 ore, più la nona parte delle 4 ore che rimangono. E poichè 4 ore equivalgono a 240 minuti, si può dire che è:

$$\frac{67^h}{9} = 7^h + \frac{240^m}{9}.$$

Si aggiungano ai 240^m i 51^m, dei quali pure bisogna prendere la nona parte. Dividendo 291 per 9, si ottiene 32 per quoziente e 3 per resto; per conseguenza è:

$$\frac{291^{m}}{9} = 32^{m} + \frac{3^{m}}{9}.$$

Ma 3^{m} equivalgono a 180^{s}. Abbiamo poi altri 53^{s}, dei quali pure bisogna prendere la nona parte. Dividendo 233 per 9, si ottiene 25 per quoziente ed il resto 8; e ciò significa che la nona parte di 233^{s} è composta di 25^{s} più $\frac{1}{9}$ di 8^{s}. Abbiamo così trovato che $\frac{1}{9}$ dell'intervallo di tempo $67^{h}\ 51^{m}\ 53^{s}$ è rappresentato da:

$$7^{h}\ 32^{m}\ 25^{s} + \left(\frac{8}{9}\right)^{s}.$$

Oss. Si sarebbe potuto ridurre l'intervallo di tempo in unità dell'infima specie, dividere per 9 il risultato, e convertire poi il quoziente in numero complesso.

Per poco le questioni siano complicate, è sempre più semplice e più sicuro convertire i numeri dati in unità dell'infima specie, od in frazione dell'unità principale, ed effettuare sui numeri così trasformati i calcoli richiesti dalla questione che si deve risolvere.

409. Probl. *La punta della lancetta minore di un orologio (non regolato) ha descritto un arco di* $8°\ 27'\ 35''$ *in* $2^{h}\ 25^{m}\ 37^{s}$. *Si domanda l'arco descritto in un'ora.*

Risol. Si convertano i numeri dati, il primo in frazione di grado, l'altro in frazione di ora. Si trova:

$$8°\ 27'\ 35'' = \left(\frac{30455}{3600}\right)^{°}.$$

$$2^{h}\ 25^{m}\ 37^{s} = \left(\frac{8737}{3600}\right)^{h}.$$

Ora bisogna dividere il primo numero per il secondo. Si trova $\frac{30455}{8737}$. Questo numero esprime gradi. Convertendolo in numero complesso, si ha: $3°\ 29'\ 8''$ con un errore minore di $1''$. Ecco il numero domandato.

CAPITOLO XV

SISTEMA METRICO

---

110. Si chiama, in generale, *sistema metrico* l'insieme delle varie unità di misura con le quali si paragonano le grandezze, che si vogliono esprimere mediante numeri.

Poichè l'unità di misura dev'essere della stessa specie della grandezza da misurare, ogni sistema metrico presenta: un'unità di *lunghezza*, un'unità di *superficie*, un'unità di *volume* o di *capacità*, un'unità di *peso*, e un'unità di *moneta*.

Nella pratica avviene di dover misurare grandezze della stessa specie differentissime tra loro. Accade, ad es., di dover esprimere il peso di una medicina, e altra volta quello del carico di una nave. Pertanto, affine di evitar l'uso di numeri grandissimi, per ciascuna specie di grandezze in ogni sistema metrico ci sono parecchie unità di misura. Nel sistema metrico, in uso da noi, e che ora vogliamo esporre, ciascuna unità è 10 volte, o 100 volte, o 1000 volte quella della stessa specie, che è immediatamente minore. Perciò cotale sistema si dice sistema metrico *decimale*.

Misure di lunghezza.

111. L'unità fondamentale del sistema metrico decimale fu presa dalla natura; si è adottato infatti per unità principale di lunghezza la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre. Questa unità ha ricevuto il nome di *metro*.

Le unità secondarie sono dei multipli e dei sottomultipli del *metro* tali che la maggiore di due unità successive è decupla della minore.

I nomi dei multipli si formano premettendo alla parola *metro* le seguenti voci, derivate dal greco, :

Deca	che significa	*dieci*
Etto	»	*cento*
Kilo	»	*mille*
Miria	»	*diecimila.*

I sottomultipli si designano premettendo alla parola *metro* le voci seguenti :

Deci	per significare	*decimo*
Centi	»	*centesimo*
Milli	»	*millesimo.*

I prefissi: **deca, etto, kilo, miria** s' indicano per iscritto con le sole iniziali maiuscole **D, E, K, M,** premesse all' iniziale del nome dell' unità fondamentale. Così i simboli **Dm, Em, Km, Mm** si leggono rispettivamente *decametro, ettometro, kilometro, miriametro.*

Le voci **deci, centi, milli** s' indicano per iscritto con le sole iniziali minuscole premesse all' iniziale del nome dell' unità fondamentale. Così i simboli **dm, cm, mm** si leggono rispettivamente *decimetro, centimetro, millimetro.*

I nomi delle varie unità lineari, i simboli per rappresentarle, e i loro valori si trovano nella seguente tabella:

Miriametro =	**Mm.** =	10000 metri
Kilometro =	**Km.** =	1000 metri
Ettometro =	**Em.** =	100 metri
Decametro =	**Dm.** =	10 metri
Metro =	**m.**	
Decimetro =	**dm.** =	0,1 di metro
Centimetro =	**cm.** =	0,01 di metro
Millimetro =	**mm.** =	0,001 di metro.

Oss. Non furono dati nomi particolari ai multipli superiori al miriametro, nè ai sottomultipli inferiori al millimetro. (*).

In pratica si sceglie sempre un' unità proporzionata alla lunghezza da misurare. Ad es., la lunghezza delle strade si esprime in kilometri; quella delle minime lunghezze in millimetri.

La figura qui di contro rappresenta un decimetro diviso in centimetri; il primo centimetro è suddiviso in millimetri.

412. Attesa la semplicità della relazione che esiste tra le varie unità di lunghezza del sistema metrico decimale, è facilissimo esprimere una data lunghezza rispetto ad un' unità diversa da quella che fu adoperata a misurarla.

Ad es., volendo esprimere un dato numero di decametri in centimetri, basterà moltiplicare il numero

(*) Recentemente al millesimo di millimetro si è dato il nome *micron*, e si è stabilito di indicarlo con la lettera greca μ.

dato per 1000, appunto perchè un decametro equivale a 1000 centimetri. Perciò è, ad es., :

$$Dm. 42 = cm. 42000.$$

Così, per altro esempio, volendo ridurre un dato numero di decimetri in decametri, bisognerà dividere il numero per 100, appunto perchè un decimetro è *una centesima* parte di un decametro. Perciò, ad es., è :

$$dm. 48 = Dm. 0{,}48.$$

E in generale si può dire che le trasformazioni della natura di quelle dei due esempi precedenti si compiono col semplice trasportare convenientemente la virgola del numero dato.

Avendo sott'occhio la serie dei titoli :

Mm, Km, Em, Dm, m, dm, cm, mm,

basta contare quanti passi bisogna fare per andare dal titolo del numero dato a quello del nuovo, e trasportare poi la virgola nel numero dato di altrettanti posti e nella stessa direzione.

Misure di superficie.

113. *Nel sistema metrico le unità di misura delle superficie sono i quadrati costruiti sulle varie unità di lunghezza.* I nomi di queste unità si formano aggiungendo la parola *quadrato* ai nomi dei lati dei singoli quadrati. E i simboli, che rappresentano le varie unità, si ottengono scrivendo la cifra 2, a modo di esponente, alla destra del simbolo con cui si rappresenta la corrispondente unità di lunghezza. Così, ad es., l'unità di superficie, i cui lati sono lunghi un decimetro, si chiama *decimetro quadrato*, e si denota col simbolo dm^2.

114. Teor. *Ogni unità di superficie del sistema metrico decimale è composta con 100 unità dell' ordine prossimo inferiore.*

Dim. Consideriamo, ad es., il centimetro qua-

Fig 3ª

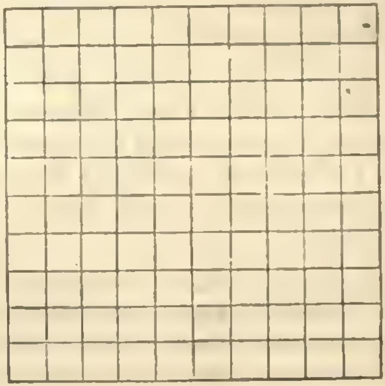


Fig 2ª

Fig 1ª

drato, che intenderemo sia rappresentato dalla figura (1). Vediamo quanti centimetri quadrati occorrano a formare l' unità prossima superiore, a formare cioè un decimetro quadrato.

Cominciamo intanto a mettere in fila 10 centimetri quadrati, come si vede nella figura (2). Ci risulta un rettangolo lungo 10 centimetri, lungo cioè un decimetro; la larghezza è soltanto di un centimetro. Ora è manifesto che, ponendo uno vicino all'altro, come si vede nella figura (3), 10 rettangoli eguali a quello testè formato, si ottiene un quadrato, i cui lati sono lunghi un decimetro, si ottiene cioè un *decimetro quadrato.* Un decimetro quadrato equivale adunque alla somma di 100 centimetri quadrati.

Similmente vedremmo che con 100 decimetri quadrati si può comporre un metro quadrato; che con 100 metri quadrati si può comporre un decametro quadrato; ecc. Appunto come si doveva dimostrare.

115. I nomi delle varie unità di superficie, i simboli per rappresentarle, e i loro valori si trovano nella seguente tabella:

Miriametro quadrato	= **Mm²**	=	100000000 di metri quadrati
Kilometro quadrato	= **Km²**	=	1000000 di metri quadrati
Ettometro quadrato	= **Em²**	=	10000 metri quadrati
Decametro quadrato	= **Dm²**	=	100 metri quadrati
Metro quadrato	= **m²**		
Decimetro quadrato	= **dm²**	=	0,01 di metro quadrato
Centimetro quadrato	= **cm²**	=	0,0001 di metro quadrato
Millimetro quadrato	= **mm²**	=	0,000001 di metro quadrato.

116. Avendo presente che ciascuna unità di superficie è 100 volte quella dell'ordine prossimo inferiore, e quindi una *centesima* parte di quella dell'ordine prossimo superiore, si potrà facilmente esprimere il valore di una superficie rispetto ad un'unità differente da quella con cui fu misurata.

Ad es., poichè un decametro quadrato equivale a 10000 decimetri quadrati, egli è:

$$Dm^2\, 37 \;=\; dm^2\, 370000.$$

Così, per altro es., volendo trasformare un dato numero di centimetri quadrati in decametri quadrati, bisognerà dividere per 1000000, appunto perchè un centimetro quadrato è una *milionesima* parte di un decametro quadrato. Perciò, ad es., è:

$$cm^2\ 874 = Dm^2\ 0{,}000874.$$

E si può dire, in generale, che le trasformazioni della natura di quelle dei due esempi precedenti si compiono col semplice trasportare nel numero dato la virgola di due, o di quattro, o di sei posti, ecc., in un senso o nell'altro secondo il caso.

Avendo sott' occhio la serie dei titoli:

Mm², Km², Em², Dm², m², dm², cm², mm²,

basta contare quanti passi occorrono per andare dal titolo del numero dato a quello del nuovo, e trasportare poi la virgola nel numero dato e nella stessa direzione di un numero doppio di posti.

417. Il *metro quadrato,* il *decametro quadrato,* l'*ettometro quadrato,* quando si adoperano nella misurazione dei campi, prendono rispettivamente i nomi di **centiara, ara, ettara,** e si denotano coi simboli **ca, a, ha.** Pertanto si possono scrivere le seguenti eguaglianze:

$$\mathbf{ca} = \mathbf{m}^2 \qquad \mathbf{a} = \mathbf{Dm}^2 \qquad \mathbf{ha} = \mathbf{Em}^2.$$

Misure dei corpi.

418. Si chiama *cubo* un solido, che è circoscritto da sei quadrati eguali. (Un dado da giocare ha la forma del cubo).

Nel sistema metrico le unità di volume sono i cubi, i cui spigoli sono eguali alle unità di lunghezza. I nomi delle unità di volume si formano aggiungendo la parola *cubo* al nome dei loro spigoli. E codeste unità si denotano scrivendo la cifra 3, a modo di esponente, alla destra del simbolo con cui si denota lo spigolo del cubo. Perciò, ad es., l'unità di volume i cui spigoli sono lunghi un decimetro, si chiama *decimetro cubo,* e si denota col simbolo dm^3.

419. Teor. *Ogni unità di volume del sistema me-*

Fig 6ª

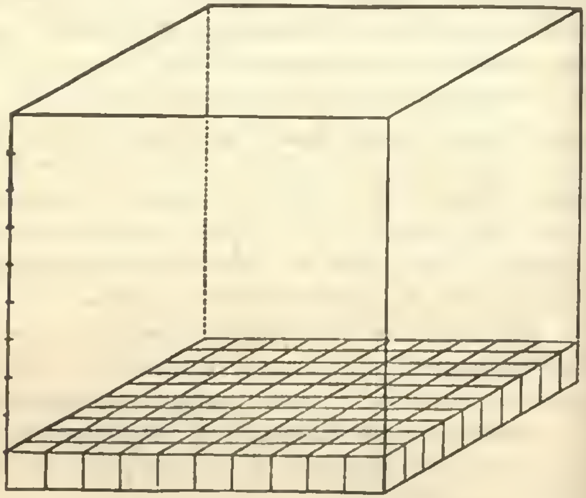


Fig 5ª

Fig 4ª

trico decimale è composta con 1000 *unità dell'ordine prossimo inferiore.*

Dim. Consideriamo, ad es., il centimetro cubo, che intenderemo sia rappresentato dalla figura (4). Vediamo quanti centimetri cubi occorrano a formare l' unità dell'ordine prossimo superiore, a formare cioè un decimetro cubo.

Incominciamo a mettere in fila 10 centimetri cubi, come si vede nella figura (5). Ci risulta un solido lungo 10 centimetri, lungo cioè un decimetro; però è largo soltanto un centimetro, e l'altezza è pure di un solo centimetro.

Mettiamo ora 10 solidi eguali a quello testè formato, gli uni accanto degli altri, come si vede nella parte inferiore della figura (6). Così abbiamo adoperati 100 centimetri cubi. Il solido, che ci risulta, è lungo un decimetro, è largo parimente un decimetro; ma l'altezza è di un solo centimetro.

Ora è manifesto che, sovrapponendo al solido così formato altri 9 strati eguali, si ottiene un cubo, i cui spigoli sono lunghi un decimetro, che è in somma un *decimetro cubo.* Ma a formarlo abbiamo dovuto adoperare 1000 centimetri cubi.

Similmente vedremmo che con 1000 decimetri cubi si può formare un *metro cubo*; che con 1000 metri cubi si può comporre un *decametro cubo*; ecc. Appunto come si doveva dimostrare.

420. I multipli del metro cubo sono poco usati; si adoperano ad esprimere i volumi dei corpi celesti. Lasciando per questo da banda i multipli, formeremo una tabella coi nomi delle altre unità di volume, coi simboli che le rappresentano, e coi loro valori.

Metro cubo = $\mathbf{m^3}$

Decimetro cubo = $\mathbf{dm^3}$ = *millesimo* di metro cubo
Centimetro cubo = $\mathbf{cm^3}$ = *milionesimo* » »
Millimetro cubo = $\mathbf{mm^3}$ = *bilionesimo* » »

121. Anche per le varie unità di volume è facile cambiare un dato numero esprimente un volume in quello che si riferisce ad altra unità di misura. Ad es., volendo trasformare m^3 0,7 in centimetri cubi, bisognerà moltiplicare due volte per 1000, ossia trasportare di sei posti la virgola verso destra. Così si trova essere:

$$m^3\,0,7 = cm^3\,700000.$$

Avendo sott' occhio la serie dei titoli:

$$\mathbf{m^3}, \quad \mathbf{dm^3}, \quad \mathbf{cm^3}, \quad \mathbf{mm^3},$$

basta contare quanti passi occorrono per andare dal titolo del numero dato a quello del nuovo, e trasportare poi la virgola nel numero dato, e nella stessa direzione, di un numero triplo di posti.

122. Oss. I volumi minori di un millimetro cubo si sogliono esprimere in frazioni decimali di millimetro cubo. Così si dirà, ad es., che un corpo ha un volume di 72 centesimi di millimetro cubo, e si scriverà mm^3 0,72.

123. Per misurare la legna da ardere si adopera comunemente per unità il metro cubo, che prende in tal caso il nome di *stero*. Dello stero non si considera che un multiplo, il *decastero*, che vale 10 steri (e che non si confonderà col decametro cubo, che contiene 1000 steri). Lo stero si indica con la lettera **s**.

124. Per misurare i liquidi e le granaglie si è presa per unità principale il decimetro cubo, che prende in tal caso il nome di *litro*. Il litro ha due multipli decimali, il *decalitro* e l' *ettolitro*, che valgono rispettivamente 10 litri e 100 litri; ed ha due sottomultipli decimali, il *decilitro* e il *centilitro*, che valgono rispettivamente $\frac{1}{10}$ ed $\frac{1}{100}$ di litro. (*).

(*) Protraendo la serie, si otterrebbe il *kilolitro* da una banda e il *millilitro* dall'altra. Il primo, perchè corrispondente

Supponendo che la figura (4) rappresenti un decimetro cubo, essa ha la capacità di un litro. In tale ipotesi la figura (5) ha la capacità di un decalitro, e lo strato inferiore della figura (6) ha la capacità di un ettolitro.

Per converso, supponendo che la figura (6) rappresenti un decimetro cubo e quindi un litro, lo strato inferiore ha la capacità di un decilitro, ed in tal caso la figura (5) ha la capacità di un centilitro.

In pratica alle varie misure di capacità si danno forme diverse e si fanno di diverse materie, secondo l'uso a cui devono servire.

Segue la tabella dei nomi delle misure di capacità, dei simboli per rappresentarle e dei loro valori.

Ettolitro	=	**hl.**	=	100 litri
Decalitro	=	**dal.**	=	10 litri
Litro	=	**l.**		
Decilitro	=	**dl.**	=	0,1 di litro
Centilitro	=	**cl.**	=	0,01 di litro.

Misure di peso.

125. L'unità principale di peso si chiama *grammo. Il grammo è il peso, nel vuoto, di un centimetro cubo d'acqua distillata, alla temperatura di 4 gradi centigradi.* (A questa temperatura l'acqua raggiunge la sua massima densità).

I nomi dei multipli e sottomultipli del grammo,

a 1000 litri, cioè a 1000 decimetri cubi, sarebbe il metro cubo; l'altro, essendo *un milionesimo* di metro cubo, non sarebbe altro che il centimetro cubo. Però le denominazioni kilolitro e millilitro non sono usate.

i simboli per rappresentarli e i loro valori sono notati nella tabella seguente.

Kilogrammo	=	**Kg.**	=	1000 grammi
Ettogrammo	=	**Eg.**	=	100 grammi
Decagrammo	=	**Dg.**	=	10 grammi
Grammo	=	**g.**		
Decigrammo	=	**dg.**	=	0,1 di grammo
Centigrammo	=	**cg.**	=	0,01 di grammo
Milligrammo	=	**mg.**	=	0,001 di grammo.

126. Oss. Poichè il centimetro cubo (volume di un grammo d'acqua, ecc.) è composto di 1000 millimetri cubi, si può dire che il milligrammo è il peso di un millimetro cubo d'acqua, ecc.

Il kilogrammo è l'unità più usata nel commercio minuto. Poichè 1000 centimetri cubi formano un decimetro cubo, ossia un litro, si può dire che un kilogrammo è il peso di un litro d'acqua, ecc.

Per esprimere pesi molto grandi, quali il carico di una nave, di un vagone di ferrovia, ecc., si adopera il *quintale*, che è il peso di 100 kilogrammi; e spesso anche la *tonnellata*, che equivale a 10 quintali, epperò a 1000 kilogrammi. Il quintale si rappresenta con la lettera **q**, e la tonnellata con la lettera **t**.

Poichè l'ettolitro è la capacità di 100 litri, un quintale è il peso d'un ettolitro d'acqua, ecc. E poichè un metro cubo è composto di 1000 decimetri cubi, un metro cubo d'acqua, ecc., pesa 1000 kilogrammi, ossia una tonnellata.

Monete.

127. L'unità monetaria è la *lira*, che è un pezzo d'argento, il quale pesa 5 grammi. Di questi, soltanto g. 4,5 sono argento puro; il rimanente è rame, che serve a dare maggiore resistenza alla moneta.

I multipli della lira non hanno ricevuto nomi particolari. La centesima parte della lira si dice *centesimo.*

Il valore legale della moneta d'oro è 15 volte e $\frac{1}{2}$ quello della moneta d'argento dello stesso peso.

Tavole di ragguaglio.

128. Si presenta frequentemente il caso di dover tradurre misure antiche in misure metriche. A tal fine si ricorre alle *tavole di ragguaglio*, dove si trovano i valori delle varie unità delle misure antiche espressi mediante le nuove misure.

Ad esempio, volendo esprimere in metri la lunghezza di 5 tese, 2 piedi, 3 pollici, 11 linee (*), si ricorre alle tavole di ragguaglio, dove si trova che:

1 tesa	equivale a	m. 1,94904
1 piede	»	m. 0,32484
1 pollice	»	m. 0,02707
1 linea	»	m. 0,00225.

Così moltiplicando il valore della tesa per 5, quello del piede per 2, quello del pollice per 3, quello della linea per 11, e sommando i risultati, si otterrà la lunghezza data espressa in metri.

Oss. Si sarebbe potuto convertire il dato numero complesso in frazione dell'unità principale, e moltiplicare per la frazione risultante il valore di questa unità dato dalla tavola di ragguaglio.

(*) La *tesa* è un'antica misura lineare di Francia. La tesa era suddivisa in 6 *piedi*, un piede in 12 *pollici*, il pollice in 12 linee, e la linea in 12 *punti*.

CAPITOLO XVI

RAPPORTO, PROPORZIONE, PROPORZIONALITÀ

RAPPORTO.

429. Siano A e B due grandezze omogenee. Supponiamo che, dividendo la A in un certo numero di parti eguali, e dividendo la B in un altro numero di parti eguali, le parti delle due grandezze siano tutte uguali tra loro. Posto che sia m il numero delle parti della A, ed n quello delle parti della B, si esprimerà la indicata relazione tra le grandezze A e B dicendo che *un emmesimo* della A è uguale ad *un ennesimo* della B. E si rappresenterà codesta relazione scrivendo:

$$\frac{1}{m} A = \frac{1}{n} B.$$

È manifesto che la relazione stessa tra le grandezze A e B si può accennare dicendo che la grandezza A è uguale ad m *ennesimi* della B (*), o che la B è uguale ad n *emmesimi* della A, e quindi scrivendo:

$$A = \frac{m}{n} B, \qquad \text{oppure} \qquad B = \frac{n}{m} A.$$

430. È facile riconoscere che, se una parte aliquota di una grandezza A è uguale ad una parte aliquota di un'altra grandezza B, ci sono altre parti aliquote delle due grandezze che sono eguali tra loro.

(*) S'intende dire che la grandezza A è uguale alla *somma* (all'*aggregato*) di m *ennesimi* della B.

Infatti supposto, ad es., che *un emmesimo* della A sia eguale ad *un ennesimo* della B, se dividiamo queste due parti aliquote in uno stesso numero qualunque p di parti eguali, otteniamo due parti aliquote delle due grandezze A e B, che sono esse pure uguali tra loro. In altre parole, se è:

$$\frac{1}{m} A = \frac{1}{n} B,$$

e p dinota un intero qualunque, è anche:

$$\frac{1}{mp} A = \frac{1}{np} B.$$

431. Teor. *Se due grandezze omogenee hanno parti aliquote uguali, il quoziente dei due interi, che indicano in quante parti si possono dividere le due grandezze per ottenere parti aliquote uguali,* è costante. (*).

Dim. Siano A e B due grandezze omogenee, e sia:

$$\frac{1}{m} A = \frac{1}{n} B \quad \text{ed} \quad \frac{1}{p} A = \frac{1}{q} B.$$

Dico essere:

$$m : n = p : q.$$

Infatti dalle due precedenti eguaglianze si deducono le due:

$$\frac{1}{mp} A = \frac{1}{np} B \quad \text{ed} \quad \frac{1}{mp} A = \frac{1}{mq} B,$$

dalle quali si conchiude essere:

$$\frac{1}{np} B = \frac{1}{mq} B,$$

e quindi:

$$mq = np.$$

(*) Con quest'ultima parola s'intende dire che, se si cambiano i numeri [430], non muta però il loro quoziente.

Infine, dividendo i due prodotti eguali per $n\,q$, si trova che è [282, 281]:

$$m : n = p : q, \qquad \text{c. d. d.}$$

432. Def. *Se due grandezze omogenee hanno parti aliquote uguali, la frazione i cui termini esprimono come una delle grandezze sia multipla di una parte aliquota dell' altra si dice* rapporto *della prima grandezza alla seconda.*

Es. Le grandezze omogenee A e B siano tali che, ad es., $\frac{1}{7}$ della A sia eguale ad $\frac{1}{12}$ della B. In tal caso si può dire che la grandezza A è la somma di 7 *dodicesimi* della B. La frazione $\frac{7}{12}$ si dice *rapporto* della A alla B.

Se anche [430] $\frac{1}{m}$ della A è uguale ad $\frac{1}{n}$ della B, anche [432] la frazione $\frac{m}{n}$ è il *rapporto* della A alla B. Sappiamo [431] essere però:

$$\frac{m}{n} = \frac{7}{12}.$$

433. Può darsi che una parte aliquota di una grandezza A sia eguale ad un' altra grandezza B. Supponiamo che sia $\frac{1}{m}$ della A eguale alla B. In tal caso, considerando la B come parte aliquota di se stessa, il rapporto della A alla B sarebbe la frazione $\frac{m}{1}$, cioè l' intero m.

In questo caso, se $\frac{1}{p}$ della A è uguale ad $\frac{1}{q}$ della B, l' intero p è multiplo di q, perchè dev' essere [431]:

$$p : q = m : 1.$$

434. Per trovare il rapporto tra due grandezze date, bisogna, secondo la definizione [432], trovare due parti aliquote delle due grandezze che siano eguali tra loro.

In pratica invece si divide una delle due grandezze in parti eguali talmente che una delle parti sia tanto piccola, che una sua porzione sia trascurabile. Poi si *misura* l'altra grandezza con una delle parti aliquote, trascurando il resto, se ad un resto si perviene.

Così, ad es., volendo il rapporto di un segmento al metro, se una parte di millimetro sia trascurabile, si cerca quanti millimetri sono contenuti nel segmento. Se ne son contenuti 71, il rapporto è $\frac{71}{1000}$.

Si può dire che il rapporto tra due grandezze esprime la legge secondo cui una delle grandezze si può dedurre dall'altra. Quando il rapporto sia stato trovato operando come si è ora accennato, allora da una delle grandezze si può soltanto ricavarne una che sia poco differente dall'altra.

435. Teor. *Il quoziente dei rapporti di due grandezze ad una terza loro omogenea qualunque è il rapporto della prima grandezza alla seconda.*

Dim. Siano A, B, C tre grandezze omogenee qualunque. Dico che, dividendo il rapporto della A alla C per il rapporto della B alla C, si ottiene il rapporto della grandezza A alla B.

Sia $\frac{m}{n}$ il rapporto della A alla C, e $\frac{p}{q}$ quello della B alla C. Egli è adunque [432]:

$$\frac{1}{m} A = \frac{1}{n} C \qquad \text{ed} \qquad \frac{1}{p} B = \frac{1}{q} C,$$

epperò anche:

$$\frac{1}{mq} A = \frac{1}{nq} C \qquad \text{ed} \qquad \frac{1}{np} B = \frac{1}{nq} C.$$

Dalle due ultime uguaglianze si conchiude che è:

$$\frac{1}{mq} A = \frac{1}{np} B,$$

epperò che il rapporto della A alla B è la frazione $\frac{mq}{np}$.

Così, essendo:

$$\frac{mq}{np} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m}{n} : \frac{p}{q},$$

il teorema è dimostrato.

436. Oss. Dividendo il rapporto della B ad una grandezza C per quello della A alla C, risulta un numero che è l'*inverso* [276] di quello, che si otterrebbe dividendo il rapporto della A alla C per il rapporto della B alla C. Perciò il rapporto di A a B e quello di B ad A si dicono *inversi*, l'uno dell'altro.

437. Il quoziente della divisione di un numero a per un'altro b si dice anche *rapporto* di a a b.

PROPORZIONE

Definizioni.

438. Def. *Quattro grandezze si dicono in proporzione (nell' ordine in cui sono date), se il rapporto della prima alla seconda è uguale al rapporto della terza alla quarta.*

Oss. Una prima condizione, perchè quattro grandezze possano essere in proporzione, è questa, che la prima e la seconda siano omogenee, e così la terza e la quarta; chè infatti due grandezze eterogenee non hanno rapporto tra di loro. Ma la specie delle due ultime può essere diversa da quella delle due prime.

439. Def. *Quattro numeri si dicono in proporzione (nell' ordine in cui sono dati), se il rapporto (quoziente) del primo al secondo è uguale al rapporto del terzo al quarto.*

Per significare che quattro numeri **a, b, c, d** sono in proporzione, si scrive:

$$\mathbf{a : b = c : d}$$

ma bene spesso, quantunque i termini dei quozienti possano essere frazionari, si scrive nel modo che segue:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}.$$

Invece di leggere:

a *diviso* **b** *eguale a* **c** *diviso* **d**,

si suol dire:

a *sta a* **b** *come* **c** *sta a* **d**.

I numeri **a**, **b**, **c**, **d** si chiamano i *termini* della proporzione; (**a** : **b**) è il primo rapporto, (**c** : **d**) il secondo rapporto; **a** e **c** si dicono gli *antecedenti* **b** e **d** i *conseguenti*; **a** e **d** gli *estremi*, **b** e **c** i *medi*.

Si accenna che quattro numeri **a**, **b**, **c**, **d** formano la proporzione:

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d}$$

anche dicendo che **a** e **c** sono *proporzionali* ai numeri **b** e **d**: od anche talvolta dicendo che i numeri **a** e **d** sono *inversamente proporzionali* ai numeri **b** e **c**.

Teoremi sulle proporzioni.

440. Teor. *Se quattro grandezze* A, B, C, D *sono in proporzione, e i numeri* **a** *e* **b** *sono i rapporti delle due prime ad un' altra grandezza loro omogenea qualunque, e* **c** *e* **d** *sono i rapporti delle* C *e* D *ad una grandezza loro omogenea qualunque, anche i quattro numeri* **a**, **b**, **c**, **d** *sono in proporzione. Reciprocamente, se i quattro numeri* **a**, **b**, **c**, **d** *sono in proporzione, anche le quattro grandezze* A, B, C, D *sono in proporzione.*

Dim. Infatti, il quoziente $\frac{a}{b}$ è uguale [435] al rapporto della grandezza A alla B, ed il quoziente $\frac{c}{d}$ è uguale al rapporto della C alla D. Quindi, se sono eguali i rapporti, sono eguali anche i quozienti, epperò [439] i numeri **a, b, c, d** sono in proporzione.

Reciprocamente, se i quozienti $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono eguali, anche [435] il rapporto della grandezza A alla B è uguale al rapporto della C alla D, epperò [438] le quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione.

Oss. D'ora in poi, quando parleremo di proporzione, intenderemo sempre di proporzione tra numeri.

441. Teor. *In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.*

Dim. Prendiamo, ad es., la proporzione:

$$a : b = c : d,$$

dove con le lettere a, b, c, d si intende di significare numeri qualunque, che possono essere interi o frazionari. Si tratta di provare che il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi.

Indichiamo a tal fine con la lettera q quel numero, che si otterrebbe dividendo il primo termine per il secondo. La stessa lettera q indica allora anche il quoziente della divisione del terzo termine per il quarto.

Poichè, in una divisione, il dividendo è uguale al prodotto del divisore per il quoziente (completo), possiamo scrivere:

$$a = b \cdot q, \qquad c = d \cdot q.$$

Sostituendo nella proporzione data in luogo del primo termine e del terzo le espressioni precedenti, la proporzione prende l'aspetto che segue:

$$(b \cdot q) : b = (d \cdot q) : d.$$

Ed ora è manifesto che il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medi, perchè ambidue i prodotti sono composti coi medesimi tre fattori b, d e q.

Così resta provato che *ecc.*

442. Teor. *Se il prodotto del primo e del quarto di quattro numeri dati è uguale al prodotto degli altri due, i quattro numeri, presi nell' ordine in cui sono dati, formano una proporzione.*

Dim. Supponiamo che i quattro numeri a, b, c, d siano tali che il prodotto del primo e del quarto sia eguale al prodotto degli altri due. Sia cioè:

$$(a \cdot d) = (b \cdot c).$$

Si vuol provare che i quattro numeri, presi nell' ordine in cui sono dati, formano una proporzione.

Intanto è manifesto che, se dividiamo i due prodotti dati, ambidue per il prodotto $(b \cdot d)$, si ottengono quozienti eguali. Abbiamo dunque:

$$(a \cdot d) : (b \cdot d) = (b \cdot c) : (b \cdot d).$$

Sappiamo [284] che, se si dividono il dividendo e il divisore per uno stesso numero, il quoziente non muta. Così, dividendo i due termini del primo quoziente per d, e i due termini del secondo per b, otteniamo [281]:

$$a : b = c : d,$$

che è appunto la proporzione, che si d. d.

443. Oss. In base al penultimo teorema possiamo dire che, se, facendo il prodotto degli estremi di una proporzione e quello dei medi, non si trovano risultati eguali, la proporzione non è esatta. E infatti in ogni proporzione esatta i due prodotti sono eguali tra loro.

Se poi i prodotti riescono eguali, tanto basta per poter conchiudere che la proporzione è esatta, giacchè si è provato ultimamente, che, se quattro numeri sono tali che il prodotto del primo e del quarto sia eguale al prodotto degli altri due, i quattro numeri, presi nell' ordine in cui sono dati, formano una proporzione.

In altre parole:

Perchè una proporzione sia esatta è necessario e sufficiente che il prodotto degli estremi sia eguale a quello dei medi.

444. Teor. *Se quattro numeri, presi nell' ordine in cui sono dati, formano una proporzione, formano una proporzione anche se ciascun antecedente si scambia di posto col suo conseguente, ed anche se si scambiano tra loro di posto i medi, oppure gli estremi.*

Dim. Sia la proporzione:

$$a : b = c : d.$$

Sappiamo essere [442]:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Anche nelle proporzioni:

$$b : a = d : c$$

ed

$$a : c = b : d$$

il prodotto dei medi è dunque uguale a quello degli estremi, epperò [443] esse sono esatte, c. d. d.

Oss. La penultima proporzione si dice ricavata dalla precedente *invertendo*, e l' ultima col *permutare i medi* (*permutando*).

Da una proporzione, col permutare e coll' invertire replicatamente, se ne possono ricavare altre sette. (Delle otto proporzioni due cominciano col primo termine della data, due col secondo, due col terzo, e due col quarto).

445. Teor. *In una proporzione si possono moltiplicare o dividere un medio ed un estremo per uno stesso numero qualunque.*

Dim. Sia la proporzione:

$$a : b = c : d.$$

Dico, ad es., che anche:

$$am : b = cm : d,$$

dove m rappresenta un numero qualunque, intero o frazionario.

Infatti dalla proporzione data si conchiude che è:

$$ad = bc$$

e per conseguenza è anche:

$$adm = bcm.$$

Quest'eguaglianza prova l'esattezza della seconda proporzione.

E perchè dividere per un numero equivale a moltiplicare per il suo inverso, possiamo ritenere provata anche la seconda parte del teorema.

Pertanto, ad es., avendo la proporzione:

$$20 : \frac{50}{3} = x : \frac{7}{3},$$

si può sopprimere nei conseguenti il divisore 3, perchè ciò equivale a moltiplicarli per 3. E poi si può dividere per 10 i due primi termini. Così dalla proporzione data si deduce l'altra più semplice:

$$2 : 5 = x : 7.$$

446. Teor. *In una proporzione ciascun estremo è uguale al prodotto dei medi diviso per l'altro estremo; e ciascun medio è uguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio.*

Dim. Sia la proporzione:

$$a : b = c : d.$$

Sappiamo che il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medi. È dunque:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Dividendo questi due prodotti eguali ordinatamente per ciascuno dei termini della proporzione, si ottengono le uguaglianze seguenti:

$$d = (b \cdot c) : a$$

$$(a \cdot d) : b = c$$

$$(a \cdot d) : c = b$$

$$a = (b \cdot c) : d,$$

le quali provano la verità del teorema.

447. In base all' ultimo teorema si può trovare un termine incognito di una proporzione, quando siano noti gli altri tre.

Così, ad es., dalla proporzione:

$$8 : x = \frac{3}{5} : 9$$

si ricava:

$$x = (8 \cdot 9) : \frac{3}{5} = 120.$$

448. Il teorema: in una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, per il caso che la proporzione sia *continua*, per il caso cioè che i medi siano eguali, come nella seguente:

$$a : m = m : b,$$

diventa: *in una proporzione continua il quadrato del termine medio è uguale al prodotto degli estremi.*

Per conseguenza: *in una proporzione continua il termine medio è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi.*

449. Teor. *Se quattro numeri sono in proporzione, anche la somma del primo e del secondo sta al secondo, come la somma del terzo e del quarto sta al quarto.*

Dim. Sia la proporzione:

$$a : b = c : d.$$

Dico che anche:

$$(a + b) : b = (c + d) : d.$$

Infatti perchè, dovendo dividere una somma per un numero, si può [279] invece dividere le singole parti della somma per il divisore e sommare i quozienti, i due rapporti della seconda proporzione sono rispettivamente uguali alle somme:

$$(a : b) + 1 \quad \text{e} \quad (c : d) + 1,$$

e queste, avuto riguardo alla proporzione data, si riconoscono essere uguali. Per conseguenza la seconda proporzione è esatta, c. d. d.

Oss. La seconda delle due proporzioni si dice ricavata dalla prima: *componendo.*

450. Teor. *Se più rapporti sono eguali tra loro, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come uno degli antecedenti sta al suo conseguente.*

Dim. Consideriamo la serie di rapporti eguali:

$$a : b = c : d = e : f = h : k,$$

dove con le lettere a, b, c . . . si intende di rappresentare numeri qualunque, che possono essere interi o frazionari.

Dalla proporzione formata dai due primi rapporti, permutando, si ottiene:

$$a : c = b : d,$$

e da questa, componendo, risulta la proporzione:

$$(a + c)\ c = (b + d) : d,$$

dalla quale, permutando, si ha:

$$(a + c) : (b + d) = c : d.$$

Così, per il caso che i rapporti eguali siano due soltanto, il nostro teorema è dimostrato. Ma facilmente lo si estende ad un numero qualunque di rapporti. Infatti, ponendo nell'ultima proporzione in luogo del secondo rapporto il terzo dei rapporti dati, e applicando alla proporzione:

$$(a + c) : (b + d) = e : f$$

il teorema in questione (che per il caso in cui i rapporti sono due è stato dimostrato), si ottiene:

$$(a + c + e) : (b + d + f) = e : f.$$

Ormai è manifesto come si seguiterebbe, finchè fossero tutti considerati i dati rapporti; epperò il teorema è dimostrato.

451. Teor. *Moltiplicando tra loro ordinatamente i termini di più proporzioni date, si ottengono quattro prodotti che formano anch'essi una proporzione.*

Dim. Siano le due proporzioni:

$$a : b = c : d$$
$$m : n = p : q,$$

nelle quali le lettere rappresentano numeri qualunque, interi o frazionari.

Dalle due proporzioni ricaviamo [441] intanto le uguaglianze:

$$a \cdot d = b \cdot c \qquad m \cdot q = n \cdot p.$$

Per conseguenza egli è:

$$a \cdot d \cdot m \cdot q = b \cdot c \cdot n \cdot p$$

e quindi anche [267, 1°]:

$$(a \cdot m)(d \cdot q) = (b \cdot n)(c \cdot p).$$

Ma poichè i quattro prodotti:

$$(a \cdot m) \quad (b \cdot n) \quad (c \cdot p) \quad (d \cdot q)$$

sono tali che il prodotto del primo e del quarto è uguale al prodotto del secondo e del terzo, essi sono in proporzione [442]. Egli è adunque:

$$(a \cdot m) : (b \cdot n) = (c \cdot p) : (d \cdot q).$$

Così il teorema è dimostrato per il caso che due sole siano le proporzioni date. Ma è chiaro che, applicandolo così ristretto alle due prime, poi alla proporzione da esse ricavata ed alla terza, e così via, si conchiude in fine che esso vale per un numero qualunque di proporzioni.

PROPORZIONALITÀ

Preliminari.

452. Spesso nelle questioni, che si trattano con l'aiuto dell'Aritmetica, si devono considerare ad un tempo parecchie grandezze omogenee. In tal caso giova talvolta, per semplicità di discorso, riguardare codeste grandezze come *stati* di una stessa *grandezza variabile*.

Così, ad es. dovendo considerare i pesi a, b, c . . . di parecchie partite d'una merce, si considerano codesti pesi come *stati* della grandezza indeterminata *peso*, la quale ha mutato, passando dal valore a, che aveva in un caso, al valore b, ecc. Similmente i prezzi delle singole partite di quella merce si considerano come *stati* assunti dalla grandezza variabile *prezzo*.

453. Generalmente, al mutare di una grandezza variabile, devono mutare una o più altre grandezze.

Ad es., al variare del peso di una merce muta il suo prezzo.

Al variare del raggio di un circolo, mutano la lunghezza e la superficie del circolo.

454. Due grandezze variabili si dicono *dipendenti*, l'una dall'altra, se al variare di una di esse deve variare anche l'altra.

Gli stati, che possono assumere due grandezze variabili dipendenti, si possono adunque pensare come accoppiati a due a due, dacchè ad ogni stato dell'una *corrisponde* uno stato determinato dell'altra.

455. Molto spesso una grandezza variabile dipende da parecchie altre ad un tempo, e non da una soltanto. Ad es., il prezzo d'una pezza di stoffa non dipende solo dalla lunghezza, ma ben anche dalla larghezza, dalla qualità, dalla maggiore o minore ricerca (moda, stagione). Così il peso di un filo metallico dipende dalla lunghezza, dalla grossezza, dalla qualità del metallo di cui è formato.

Accade sovente che muti una soltanto delle circostanze che hanno influsso sopra una grandezza che dipende da parecchie. In tal caso, quando si domanda, ad es., di quanto muti la prima grandezza per un dato cambiamento della seconda, o vien dichiarato, o si ammette tacitamente che tutte le altre circostanze rimangano invariate. Così, se vien proposto il problema: Venti metri d'un certo filo pesano 80 grammi; quanto pesano 35 metri del filo *stesso?* In questo caso con la parola *stesso* vien fatto intendere che la grossezza, la qualità rimangono immutate.

Invece, se vien proposto il problema: Alcuni operai in 3 giorni hanno scavato un fosso lungo 50 metri; quanti metri ne scaveranno in 17 giorni? In questo caso è sottinteso che restano invariate una folla d'altre circostanze le quali possono aver influsso sulla durata del tempo; così si sottintende che non mutano il numero degli operai, il numero delle ore giornaliere di lavoro, la larghezza del fosso, ecc.

Talvolta al variare d'una grandezza un'altra deve variare *necessariamente*; in altri casi invece la seconda grandezza muta per una *convenzione*, che si può violare. Ad es., se il raggio d'un cerchio aumenta, cresce necessariamente la superficie del cerchio. Invece un negoziante, che ha venduto 30 kilogrammi d'una sua merce per 100 lire, può, se vuole, darne poi 35 kilogrammi per il medesimo prezzo.

Leggi, le quali indicano come varî una grandezza al variare di un'altra da cui dipende, ce ne sono molte, differenti tra loro. Intanto al crescere d'una grandezza, quell'altra aumenta oppure diminuisce (*); ciascuno di questi due casi può presentare notevoli differenze. Ad es., al crescere del peso d'una merce, aumenta anche il prezzo, ma non sempre in uno stesso modo. Infatti, se un grammo d'un metallo prezioso costa 5 lire, 2 grammi costano 10 lire; laddove, se una pietra preziosa del peso d'un grammo costa 5 lire, una pietra della stessa qualità, che pesi 2 grammi, può costare 15 o 20 lire.

È manifesto che, dovendo risolvere una data questione in cui si considerano due grandezze variabili dipendenti l'una dall'altra, è necessario conoscere la legge secondo la quale una delle grandezze varia al variare dell'altra.

Fra le molte leggi noi ci restringiamo a considerarne due delle più semplici, perchè sono quelle che si presentano in pratica molto più frequentemente d'ogni altra.

(*) Può anche darsi chè, pur seguitando ad aumentare una delle grandezze, l'altra ad un certo punto cessi di aumentare, e diminuisca Si possono dare altri casi ancora, che tacciamo, perchè non intendiamo di occuparcene.

Proporzionalità (diretta).

456. Def. *Due grandezze variabili dipendenti si dicono proporzionali tra loro, se due stati qualunque dell'una sono proporzionali agli stati corrispondenti dell'altra.*

457. Non ispetta all'Aritmetica di dimostrare (posto che abbia luogo) la proporzionalità tra due grandezze variabili, ma alla scienza che tratta particolarmente di quelle tali grandezze. Però, perchè si danno grandezze variabili dipendenti che non appartengono a nessuna scienza, giova conoscere il seguente teorema, mediante il quale si può spesso decidere se due grandezze variabili sono o no proporzionali tra loro.

458. Teor. *Se due grandezze variabili dipendono l'una dall'altra talmente che, se una di esse, partendo da uno stato qualunque, diventa doppia, tripla . . . . ., anche l'altra deve diventare rispettivamente doppia, tripla . . . , le due grandezze variabili sono proporzionali tra loro.*

Dim. Chiamiamo X ed Y due grandezze variabili dipendenti l'una dall'altra talmente che, se una di esse, partendo da uno stato qualunque, diventa doppia, tripla. . . . , anche l'altra deve diventare rispettivamente doppia, tripla . . . . Si vuol dimostrare che le due grandezze variabili X, Y sono proporzionali tra loro, cioè [456] che, se X_1 ed X_2 sono due stati qualunque della X, ed Y_1, Y_2 sono gli stati corrispondenti della Y, ha luogo la proporzione:

$$X_1 : X_2 = Y_1 : Y_2 .$$

Supponiamo che il rapporto di X_1 ad X_2 sia la frazione $\frac{m}{n}$. Ciò significa che X_1 è uguale ad m volte $\frac{1}{n}$ di X_2.

Dinotiamo con X_3 l'*ennesima* parte di X_2 e con Y_3 lo stato della grandezza variabile Y che è il corrispondente di X_3.

$$\begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{matrix}$$

Ora, essendo $X_2 = n$ volte X_3,

per l'ipotesi è $Y_2 = n$ volte Y_3,

epperò è $\frac{1}{n}$ di $Y_2 = Y_3$. (1)

Così, essendo $X_1 = m$ volte X_3,

per l'ipotesi è $Y_1 = m$ volte Y_3. (2)

Dalle uguaglianze (2) ed (1) si conchiude che è:

$$Y_1 = m \text{ volte } \frac{1}{n} \text{ di } Y_2,$$

donde segue che il rapporto di Y_1 ad Y_2 è espresso dalla frazione $\frac{m}{n}$.

Così resta dimostrato che, *se ecc.*

Es. In grazia del precedente teorema si può dire, ad es., che il prezzo delle merci che si vendono a peso (*) è proporzionale al peso. Infatti, convenuto il prezzo unitario, per un peso doppio, triplo... d'un altro bisogna pagare rispettivamente il doppio, il triplo...

459. Regola del tre diretta. Quando due grandezze variabili sono proporzionali tra loro, due stati qualunque dell' una e i corrispondenti dell' altra formano una proporzione [456]; e quindi formano una

(*) Escluse quelle il cui prezzo dipende anche dalla grandezza.

proporzione anche i valori di codesti quattro stati [440]. Per conseguenza, quando siano noti tre di questi valori, si può [446] calcolare il quarto. Così fatto calcolo si dice *regola del tre (diretta)*.

Es. Probl. *Se metri 48,50 d' una certa stoffa furono acquistati con lire 157,45, quanto costeranno metri 62,32 della stoffa stessa?*

Metri	Lire
48,50	157,45
62,32	x

Risol. Poichè il prezzo della stoffa è proporzionale [458] alla lunghezza, ha luogo la proporzione:

$$48{,}50 : 62{,}32 = 157{,}45 : x,$$

da cui si ha [446]:

$$x = (62{,}32 \cdot 157{,}45) : 48{,}50 = 202{,}32.$$

460. Metodo di riduzione all' unità. Il calcolo dell' incognita in una regola del tre consiste in una moltiplicazione ed una divisione, e per conoscere quali operazioni si devono fare coi numeri dati non è necessario sapere la teoria delle proporzioni; ma è spesso sufficiente guida il buon senso. Ad es., nel precedente problema si presenta subito l' idea di cercare intanto il prezzo d' un metro di stoffa (e questo si trova dividendo il prezzo noto per la relativa lunghezza), perchè poi moltiplicando il risultato per la nuova lunghezza, si ottiene il prezzo domandato.

Oss. Fra le coppie di stati corrispondenti di due grandezze proporzionali, sono notevoli quelle due in cui uno degli stati è l' unità di misura. Quando si segue il metodo di riduzione all' unità, si passa dall' una all' altra di quelle coppie di valori di stati corrispondenti, di cui tratta la regola del tre, tirando in campo una delle due coppie singolari sopra accennate.

Proporzionalità inversa.

461. Def. *Due grandezze variabili si dicono inversamente proporzionali tra loro, se dipendono l'una dall'altra talmente che due stati qualunque dell'una sono inversamente proporzionali agli stati corrispondenti dell'altra.*

462. Non tocca all'Aritmetica di dimostrare che due date grandezze variabili dipendenti sono inversamente proporzionali tra loro (supposto che siano tali), ma alla scienza che tratta in particolare di quelle grandezze. Per grandezze, che non siano oggetto di studio di nessuna scienza, giova conoscere il seguente teorema, mediante il quale si può spesso decidere se due date grandezze variabili dipendenti sono o no inversamente proporzionali tra loro.

463. Teor. *Se due grandezze variabili dipendono l'una dall'altra talmente che, se una di esse, partendo da uno stato qualunque, diventa doppia, tripla . . . :, l'altra deve diventare rispettivamente una metà, un terzo . . . di quanto era, le due grandezze sono inversamente proporzionali tra loro.*

Dim. Le due grandezze variabili X, Y dipendano l'una dall'altra così che, se una di esse, partendo da uno stato qualunque, diventa doppia, tripla..., l'altra deve diventare rispettivamente una metà, un terzo... Si vuol dimostrare che le due grandezze X, Y sono inversamente proporzionali tra loro, cioè [416] che, se X_1, X_2 sono due stati qualunque della X, ed Y_1, Y_2 sono gli stati corrispondenti della Y, ha luogo la proporzione:

$$X_1 : X_2 = Y_2 : Y_1 .$$

Supponiamo che il rapporto della grandezza X_1 ad X_2 sia la frazione $\frac{m}{n}$. Ciò significa che la X_1 è uguale ad m volte $\frac{1}{n}$ di X_2.

Dinotiamo con X_3 l'*ennesimo* di X_2 e con Y_3 lo stato della grandezza variabile Y che è il corrispondente di X_3.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 . \end{array}$$

Ora, essendo $X_2 = n$ volte X_3,

per l'ipotesi è $Y_2 = \frac{1}{n}$ di Y_3. (1)

Così, essendo $X_1 = m$ volte X_3,

per l'ipotesi è $Y_1 = \frac{1}{m}$ di Y_3,

opperò è m volte $Y_1 = Y_3$. (2)

Dalle uguaglianze (1) e (2) si conchiude che è:

$$Y_2 = \frac{1}{n} \text{ di } m \text{ volte } Y_1 .$$

E perchè, per ottenere un *ennesimo* della somma di quante si vogliano grandezze, basta prendere un *ennesimo* di ciascuna delle parti, dall'ultima relazione conchiudiamo che è:

$$Y_2 = m \text{ volte } \frac{1}{n} \text{ di } Y_1 ,$$

donde segue che il rapporto di Y_2 ad Y_1 è espresso dalla frazione $\frac{m}{n}$.

Così abbiamo provato che, *se ecc.*

Es. Il tempo necessario a compiere un edificio è inversamente proporzionale al numero degli operai che sono impiegati, dacchè, assumendone un numero doppio, triplo . . . , si ottiene di compiere l'opera in una metà, in un terzo . . . di quel tempo.

164. Regola del tre inversa. Se due grandezze variabili sono inversamente proporzionali tra loro, due stati qualunque della prima e i corrispondenti della seconda, presi in un ordine conveniente, formano una proporzione [461]; epperò [440] anche i valori dei quattro stati formano una proporzione. Per conseguenza, conoscendo tre di codesti valori, si può [446] calcolare il quarto. Questo calcolo si dice *regola del tre inversa*.

Es. Probl. *Se* 14 *operai hanno condotto a termine un certo lavoro in* 36 *giorni, in quanti giorni lo avrebbero compito* 21 *operai?*

Operai	Giorni
14	36
21	x

Risol. Poichè il numero dei giorni e quello degli operai sono inversamente proporzionali tra loro [463], abbiamo la proporzione:

$$14 : 21 = x : 36$$

dalla quale si ricava:

$$x = (14 \cdot 36) : 21 = 24.$$

465. Metodo di riduzione all'unità. Senza ricorrere alla teoria delle proporzioni, si sarebbe risoluto il precedente problema cercando dapprima il tempo in cui avrebbe compiuto il lavoro un solo operaio, (e questo tempo si trova moltiplicando per 14 il tempo impiegato da 14 operai). Poi, dividendo il risultato per 21, si trova il tempo in cui compirebbero il lavoro 21 operai.

Proporzionalità composta.

466. Se ad alquante grandezze omogenee corrispondono altrettante grandezze, ciascuna a ciascuna, e due qualunque delle prime stanno tra loro come le corrispondenti delle seconde, si dice che le prime grandezze sono *proporzionali* alle seconde. Invece, se due qualunque delle prime sono inversamente proporzionali alle corrispondenti delle seconde, le prime grandezze si dicono *inversamente proporzionali* alle seconde.

Così, se una grandezza variabile X è proporzionale ad una grandezza variabile Y, gli stati della X sono proporzionali a quelli della Y. E se la X è inversamente proporzionale alla Y, gli stati della X sono inversamente proporzionali agli stati della Y. E reciprocamente.

467. Spesso una grandezza variabile dipende ad un tempo da parecchie grandezze variabili, dimodochè, se varia una sola di queste, anche la prima deve variare.

Ad es., il peso di un filo metallico dipende dalla lunghezza, dalla grossezza del filo, e dalla densità della materia di cui è composto. Variando una soltanto di queste ultime grandezze, il peso del filo varia.

468. Def. *Si dice che una grandezza variabile* X *è proporzionale ad altre* A, B, C, . . . , *ed inversamente proporzionale ad altre grandezze variabili* M, N, P..., *se, variando, ad es., la sola* A, *gli stati della* X *sono proporzionali agli stati della* A*; e variando, ad es., la sola* M, *gli stati della* X *sono inversamente proporzionali agli stati della M.*

Così, ad es., il numero delle pietre, che occorrono per costruire un muro, è proporzionale alla lunghezza, all'altezza, alla grossezza del muro [458], ed è inversamente proporzionale alla lunghezza, alla larghezza, alla grossezza delle pietre che si adoperano [463].

469. Regola del tre composta. Quando una grandezza variabile X è proporzionale ad alcune grandezze variabili A, B, C . . . , ed è inversamente proporzionale ad alcune altre M, N..., e si conosce il valor x della X, corrispondente a noti valori a, b, c . . . m, n. . . delle grandezze da cui dipende, si può proporre di determinare il valore x_1, che la grandezza X acquista, quando le altre passino rispettivamente ad altri valori a_1, b_1, c_1..., m_1 n_1,.... Il calcolo, che conduce allo scopo, si dice *regola del tre composta.*

Per risolvere codesto problema giova supporre che gli elementi, da cui dipende la grandezza variabile X, invece di variare tutti ad un tempo, mutino successivamente, uno per volta. Così, mediante regole del tre, dirette od inverse secondo il caso, si possono determinare i successivi valori, che andrà assumendo la grandezza variabile X, e l' ultimo sarà il valore domandato.

Intanto stabiliamo di rappresentare con x_2 il valore che assume la X, quando varia soltanto la grandezza A, da a ad a_1. Poi dinoteremo con x_3 il nuovo valore a cui passa la X, perchè la grandezza B muta di valore, da b a b_1, e così via. Tutto ciò è significato nella tabella seguente.

x	corrisponde ad	a	b	c	m	n
x_2	»	a_1	b	c	m	n
x_3	»	a_1	b_1	c	m	n
x_4	»	a_1	b_1	c_1	m	n
x_5	»	a_1	b_1	c_1	m_1	n
x_1	»	a_1	b_1	c_1	m_1	n_1.

Poichè da ciascuno dei valori della X si passa al seguente mutando una soltanto delle grandezze a cui la X è proporzionale, direttamente od inversamente, possiamo scrivere le proporzioni:

$$\begin{aligned} x &: x_2 = a : a_1 \\ x_2 &: x_3 = b : b_1 \\ x_3 &: x_4 = c : c_1 \\ x_4 &: x_5 = m_1 : m \\ x_5 &: x_1 = n_1 : n. \end{aligned}$$

Per dedurre da queste proporzioni il valore x_1, moltiplichiamone i termini ordinatamente tra loro. I quattro prodotti, che si ottengono, formano [451] una proporzione; e sopprimendo [445] in questa i fattori x_2, x_3, x_4, x_5, che sono comuni ai due termini del primo rapporto, si ottiene:

$$x : x_1 = (a \cdot b \cdot c \cdot m_1 \cdot n_1) : (a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot m \cdot n),$$

dalla quale [446] si ricava:

$$x_1 = \frac{x \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot m \cdot n}{a \cdot b \cdot c \cdot m_1 \cdot n_1}.$$

Ora possiamo enunciare la seguente:

Regola. *Conoscendo il valore* x *d'una grandezza variabile, corrispondente a dati valori* a, b, c ... m, n ... *di altre grandezze variabili, alle quali la prima è proporzionale direttamente od inversamente, per ottenere il valore* x_1 *della prima grandezza, corrispondente ai valori* a_1, b_1, c_1 ... m_1, n_1, ... *di quelle altre da cui dipende, si moltiplica il numero noto* x *per i valori primitivi* m, n ... *delle grandezze alle quali la prima è inversamente proporzionale, e per i nuovi valori* a_1, b_1, c_1 .... *di quelle a cui è proporzionale direttamente: e si divide il prodotto per il prodotto dei nuovi valori* m_1, n_1 ... *delle grandezze a cui la prima è inversamente proporzionale e dei valori primitivi* a, b, c .... *delle grandezze a cui la prima è proporzionale direttamente.*

Es. Probl. 5 *operai, lavorando* 12 *ore al giorno, scavarono, in* 24 *giorni, un canale della lunghezza di* 168 *metri. Quanti operai sono necessari per compierę in* 36 *giorni lo scavo di altri* 252 *metri del canale, dovendosi restringere il lavoro a sole* 10 *ore al giorno?*

Risol. Scriveremo su due linee i dati della questione:

Operai	Ore	Metri	Giorni
5	12	168	24
x	10	252	36.

Osserveremo poi che il numero degli operai è inversamente proporzionale al numero delle ore quotidiane di lavoro [463]; che è direttamente proporzionale al numero dei metri [458], ed inversamente proporzionale al numero dei giorni. Secondo la regola precedente si ha perciò:

$$x = \frac{5 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 252}{10 \cdot 36 \cdot 168} = 6.$$

470. Metodo di riduzione all'unità. Anche nel caso di una regola del tre composta si può adoperare il metodo di riduzione all' unità. Esso consiste nel calcolare dapprima il valore, che assumerebbe la grandezza variabile dipendente, quando tutte le grandezze da cui dipende divenissero eguali all'unità. Facilmente si trova poscia il valore desiderato, che corrisponde ai nuovi valori.

Consideriamo, ad es., il precedente problema. Si calcola intanto quanti operai sarebbero necessari a scavare *un* metro del canale, in *un* giorno, ma lavorando in quel giorno *un'* ora soltanto. Diremo:

Se invece di far lavorare per 12 ore al giorno, si farà durare il lavoro una sola ora al giorno, sarà necessario un numero d'operai 12 volte più grande; occorreranno adunque ($5 \cdot 12$) operai.

Se poi, invece di un canale della lunghezza di 168 metri, si dovrà scavarne uno di un solo metro, il numero degli operai necessari diverrà $\frac{1}{168}$ del primitivo. Basteranno cioè $\frac{5 \cdot 12}{168}$ operai.

Infine se, invece di eseguire il lavoro in 24 giorni, lo si vorrà compiuto in un giorno, sarà necessario un numero d'operai 24 volte più grande. Dovranno adunque lavorare $\frac{5 \cdot 12 \cdot 24}{168}$ operai.

Dunque $\frac{5 \cdot 12 \cdot 24}{168}$ rappresenta il numero degli operai, che possono scavare un metro del canale, lavorando un solo giorno, ed in questo per un'ora soltanto.

Ora, se invece di lavorare per una sola ora, gli operai lavoreranno per 10 ore, il loro numero si ridurrà ad $\frac{1}{10}$ del primitivo, basteranno cioè:

$$\frac{5 \cdot 12 \cdot 24}{168 \cdot 10} \text{ operai.}$$

Ma se questi operai, invece che un solo metro del canale, dovranno scavarne 252 metri, il loro numero dovrà diventare 252 volte tanto; dovrà diventare:

$$\frac{5 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 252}{168 \cdot 10}.$$

Finalmente se, invece che in un giorno, l'opera dovrà essere compiuta in 36 giorni, il numero degli operai diverrà $\frac{1}{36}$ del primitivo. Bisogna adunque impiegare definitivamente:

$$\frac{5 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 252}{168 \cdot 10 \cdot 36} = 6 \text{ operai.}$$

CAPITOLO XVII

PROBLEMI

Interesse semplice.

171. Si dice *interesse* il compenso che pretende chi presta altrui il suo denaro. La somma prestata si dice *capitale.*

Al momento del prestito si pattuisce l'interesse per un anno e per la somma di 100 lire. (*). Codesto interesse è chiamato *tassa.* Se sia convenuto, ad es., che per 100 lire del capitale prestato e per un anno si debbano pagar di compenso 5 lire e mezza, la tassa è 5 e $\frac{1}{2}$, e si dice che il capitale è impiegato al 5 e $\frac{1}{2}$ per 100.

L'interesse è *semplice,* quando il capitale resta immutato durante tutto il tempo in cui dura l'imprestito; laddove, se alla fine d'ogni anno non si riscuote l'interesse, ma si lascia che esso vada ad aumentare il capitale, che si cumuli col capitale, producendo interesse negli anni seguenti, in tal caso il capitale si dice mutuato ad interesse *composto.* Noi ci restringeremo a considerare questioni d'interesse semplice.

Il frutto o l'interesse d'un capitale qualunque per un *anno* si dice *rendita.* Così si può dire che *la*

(*) Sembrerebbe più naturale stabilire l'interesse per una lira. Ma allora accadrebbe talvolta che codesto interesse sarebbe, ad es., di 3 centesimi e mezzo.

tassa è la rendita di 100 *lire*; dividendo la tassa per 100, si ottiene la rendita d'una lira (rendita unitaria).

L'interesse è proporzionale al capitale ed al tempo. [458].

472. Gli elementi di una questione d'interesse sono quattro: il *capitale*, l'*interesse*, la *tassa* e il *tempo* per il quale dura l'imprestito. Quando sono dati tre di questi elementi, si può calcolare il quarto mediante una regola del tre composta. Affine di trattare la questione generalmente, cioè una volta per tutte, stabiliamo di dinotare con la lettera c il capitale, con i l'interesse relativo al capitale c, con r la rendita d'una lira (rendita unitaria), e con t il tempo per il quale dura l'imprestito. (*). Cerchiamo la relazione tra c, i, r, e t.

Capitale	Tempo	Interesse
1	1	r
c	t	i.

Riguardando come incognita da determinare l'interesse i, la questione è semplice, perchè è noto l'interesse corrispondente al capitale 1 ed al tempo 1. Diremo:

Poichè 1 lira dà la rendita r, c lire danno di rendita $(r \cdot c)$. Trovato l'interesse d'un anno, si moltiplica per t, e si ottiene l'interesse di t anni. Egli è adunque:

$$i = r \cdot c \cdot t. \qquad (1)$$

(*) L'unità di tempo è l'anno; perciò, se un capitale vien prestato per 200 giorni, egli è $t = \frac{200}{365}$. Se il capitale viene prestato per 5 mesi, e si computi l'anno come fosse di 360 giorni, è $t = \frac{5}{12}$.

Poichè in un prodotto ad alquanti fattori si può sostituire il prodotto effettuato, possiamo riguardare il secondo membro come il prodotto di due soli fattori, uno dei quali sia r, oppure c, oppure t. Perchè poi, dividendo il prodotto di due fattori per uno di essi, si ottien l'altro fattore, dalla precedente uguaglianza si ricavano le seguenti:

$$r = \frac{i}{c \cdot t}, \tag{2}$$

$$c = \frac{i}{r \cdot t}, \tag{3}$$

$$t = \frac{i}{r \cdot c}. \tag{4}$$

Le quattro uguaglianze (1), (2), (3), (4) si dicono *formule*, perchè simbolicamente indicano il calcolo che bisogna fare quando, essendo note tre delle quantità i, r, c, t, si vuol trovare la quarta.

Veramente nelle questioni d'interesse è data, o si domanda, la tassa, e non la rendita unitaria. Perciò, volendo usare delle formule precedenti, se è nota la tassa, bisogna cominciare a dividerla per 100, per aver la rendita unitaria. E nel caso in cui è domandata la tassa, ricorrendo alla formula (2), si calcola dapprima la rendita unitaria; moltiplicandola per 100, se ne deduce poi la tassa.

(Ma invece di ricorrere alle formule (2), (3) e (4), quando si debbano determinare rispettivamente la tassa, il capitale o il tempo, si può risolvere la questione mediante una regola del tre composta).

473. Probl. *Si calcoli l'interesse di* 2600 *lire, prestate per* 200 *giorni, al* 5,50 *per cento.*

Risol. Il secondo membro della formnla (1) indica le operazioni che si devono fare coi numeri dati. Nel caso proposto, essendo $r = 5{,}50 : 100 = 0{,}055$; $c = 2600$ e $t = \frac{200}{365}$, si ha:

$$i = 0{,}055 \cdot 2600 \cdot \frac{200}{365}.$$

Oss. Nel caso che si fosse domandato semplicemente la rendita, essendo questa l' interesse di un anno, sarebbe stato $t = 1$, epperò:

$$i = 0{,}055 \cdot 2600.$$

474. Probl. *Al quanto per* 100 *fu impiegato un capitale di* 25000 *lire, se in* 3 *mesi ha dato per interesse* 400 *lire?*

Risol. Ricorrendo alla formula (2), ponendovi nel secondo membro $i = 400$, $c = 25000$ e $t = \frac{3}{12}$, ed eseguendo le operazioni, si trova:

$$r = 0{,}064.$$

Poichè r rappresenta la rendita di una lira, laddove la tassa domandata è la rendita di 100 lire, bisogna moltiplicare per 100; così si trova che il denaro fu impiegato al 6,40 per 100.

475. Probl. *Qual capitale, impiegato al* 6 *per* 100, *produrrebbe un interesse di* 2400 *lire in* 225 *giorni?*

Risol. Ricorrendo alla formula (3), si porrà nel secondo membro:

$$i = 2400, \quad r = 6 : 100 = 0{,}06 \text{ e } t = \frac{225}{365}.$$

Eseguendo le operazioni, si trova che il capitale richiesto è di lire 64888,89.

476. Probl. *In quanto tempo* 10000 *lire, impiegate al* 5 *per* 100, *producono* 100 *lire di frutto?*

Risol. Dobbiamo ricorrere alla formula (4), e porvi $c = 10000$, $r = 0{,}05$ ed $i = 100$. Così si trova $t = \frac{1}{5}$ di un anno $= 73$ giorni.

Regola di sconto.

477. Quando si vuol riscuotere una somma prima del giorno in cui si ha diritto, conviene lasciare, a chi si presta a pagarla, un compenso che si dice *sconto*. In commercio si accorda per isconto l' interesse che la somma, che si riscuoterebbe aspettando la scadenza, frutta ad una tassa pattuita (tassa dello sconto) nel tempo di cui viene anticipato il pagamento. Le questioni relative allo sconto non differiscono adunque da quelle d' interesse semplice.

478. Probl. *Una cambiale di* 3700 *lire scade tra* 80 *giorni. Si propone di scontarla al* 6 *per* 100. *Si calcoli lo sconto.*

Risol. Lo sconto richiesto è niente altro che l' interesse dovuto a 3700 lire, impiegate per 80 giorni, al 6 per 100. Ricorrendo alla formula:

$$i = r \cdot c \cdot t,$$

otteniamo:

$$i = 0{,}06 \cdot 3700 \cdot \frac{80}{365} = 48{,}65.$$

Sulle 3700 lire chi sconta si trattiene adunque lire 48,65 e ne paga 3651,35. Questo è il *valore attuale* del biglietto; 3700 lire si dice il *valore nominale* od anche il *montante*.

479. Oss. Nell' esempio precedente si vede che colui che sconta si trattiene l' interesse di 3700 lire, mentre in realtà non ne presta che 3651,35. La tassa, a cui impiega il suo danaro, è dunque più elevata della tassa dello sconto.

Regola di società.

480. La regola di società ha per oggetto di dividere il guadagno o la perdita fatta da una società commerciale tra le persone che la compongono, ed in ragione ai loro rispettivi diritti. Manifestamente la parte di ciascun socio dev'essere proporzionale al capitale impiegato ed al tempo per cui è stato impiegato. [458].

481. Probl. *Tre negozianti si sono associati in una impresa; il primo ha posto nella società* 2500 *lire, il secondo* 4600, *ed il terzo* 3200. *Il guadagno netto fu di* 865 *lire; si domanda quanto spetti a ciascuno.*

Risol. Il capitale impiegato è di 10300 lire, e queste hanno prodotto un utile di 865 lire. Si può dire che ciascuna lira ha dato un guadagno di $\frac{865}{10300}$ di lira.

E poichè delle 10300 lire, 2500 sono del primo negoziante, a questi spetterà 2500 volte il guadagno fatto da una lira. Da ciò si comprende che le quote, a cui hanno diritto i tre soci, sono rispettivamente:

$$\frac{865}{10300} \cdot 2500 = 209,95$$

$$\frac{865}{10300} \cdot 4600 = 386,31$$

$$\frac{865}{10300} \cdot 3200 = \underline{268,73}.$$

$$864,99$$

482. Può avvenire che dei negozianti uniscano i loro capitali per una speculazione, impiegandoli per tempi differenti. Questo caso si presenta, ad es., quando uno si avventura in una speculazione, e dopo qualche tempo ha bisogno di formare società con altri per condurre a termine l'impresa. In tal caso, nel distribuire il guadagno, conviene avere riguardo ai capitali e ai tempi durante i quali furono impiegati.

483. Probl. *In un affare il socio* A *ebbe impiegate* 3000 *lire per* 5 *mesi, il socio* B *lire* 2400 *per* 3 *mesi, ed un terzo* 4600 *lire per* 6 *mesi. Quale deve essere la parte di ciascuno, posto che siasi fatto un guadagno di* 1200 *lire?*

Risol. Poichè il socio A ha impiegato 3000 lire per 5 mesi, a lui spetta la stessa parte, che se avesse posto in società $3000 \cdot 5 = 15000$ lire per un solo mese.

Così la parte del socio B è quale gli spetterebbe, se avesse prestato per un solo mese un capitale di lire $2400 \cdot 3 = 7200$. Similmente per il terzo socio è come se avesse impiegato $4600 \cdot 6 = 27600$ lire per un mese.

Il problema è così ricondotto al caso precedente, dacchè si può supporre che i tre soci abbiano poste in società, il primo 15000 lire, il secondo 7200, ed il terzo 27600 lire, per lo stesso intervallo di tempo. Si hanno così le tre quote:

$$\frac{1200}{49800} \cdot 15000 = 361{,}44$$

$$\frac{1200}{49800} \cdot 7200 = 173{,}49$$

$$\frac{1200}{49000} \cdot 27600 = \underline{665{,}06}$$

$$1199{,}99.$$

484. Se torniamo a considerare la precedente questione [482], vediamo che essa consiste nel:

Dividere un numero dato in parti proporzionali a numeri dati.

Tratteremo di nuovo l'argomento facendo uso della teoria delle proporzioni; per generalità proponiamoci il seguente:

485. Probl. *Dividere un numero* n *in tre parti, che siano proporzionali ai numeri* a, b, c.

Risol. Rappresentando le tre parti richieste con le lettere x, y, z, possiamo dire che esse devono essere tali da verificare l'eguaglianza:

$$x + y + z = n,$$

e le proporzioni:

$$x : y = a : b$$

$$y : z = b : c,$$

dalle quali, permutando [444], otteniamo:

$$x : a = y : b$$

$$y : b = z : c.$$

Dev'essere adunque:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Sappiamo poi [450] che, avendo parecchi quozienti eguali, col dividere la somma dei dividendi per quella dei divisori, si ottiene un quoziente uguale ai proposti. Così, poichè è $x + y + z = n$, abbiamo:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{n}{a + b + c}.$$

Moltiplicando per a il primo rapporto ed il quarto, otterremo prodotti eguali; è dunque:

$$x = a \cdot \frac{n}{a+b+c}.$$

Così, moltiplicando il secondo ed il quarto per b, poi il terzo ed il quarto per c, si trova:

$$y = b \cdot \frac{n}{a+b+c}, \qquad z = c \cdot \frac{n}{a+b+c}.$$

Ora possiamo enunciare la:

Regola. *Per dividere un numero* n *in parti proporzionali a dei numeri dati* a, b, c..., *si divide il numero* n *per la somma dei numeri* a, b, c..., *e si moltiplica il quoziente per questi numeri. I prodotti sono le parti domandate.*

Oss. Quando fosse richiesto di dividere un numero n in parti inversamente proporzionali a dei numeri $a, b, c \ldots$, si dividerebbe n in parti direttamente proporzionali ai numeri $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \ldots$, che sono rispettivamente gl' inversi dei numeri dati.

Regola di miscuglio.

486. Si adopera in due casi la regola di miscuglio; cioè quando si vuole:

1°. *Conoscendo la quantità e il prezzo unitario di talune sostanze da riunire, trovare il prezzo unitario del miscuglio.*

2°. *Dato il prezzo unitario del miscuglio e quelli delle sostanze da riunire, trovare in quali rapporti bisogna fare la mescolanza.*

487. Probl. *Si sono mescolati 80 litri di vino da 75 cent. il litro con 25 litri di vino da 60 cent. Quale è il prezzo di un litro della mescolanza?*

Risol. Intanto gli:

80 litri da lire 0,75 il litro costano			$0,75 \cdot 80 = 60$	lire,
ed i 25	»	0,60	» $0,60 \cdot 25 = 15$	» ;
quindi i 105 litri di vino costano in tutto			75	lire.

Infine, dividendo per 105 il prezzo del miscuglio, si otterrà il prezzo d' un litro. Si trova lire 0,71, cioè 71 centesimi.

488. Lemma. *Quando i prezzi unitari delle sostanze componenti un miscuglio ricevono un medesimo aumento o una stessa diminuzione, nel prezzo unitario del miscuglio avviene lo stesso cambiamento.*

Dim. Per riconoscere la verità della proposizione, imaginiamo che un negoziante abbia varie qualità d' una merce da prezzi diversi, 100 kilogrammi in tutto. Se, dopo che ne sia stato fatto un miscuglio, il prezzo d'ogni qualità cresce d'una lira, il prezzo totale della merce cresce di 100 lire, ed il negoziante ricaverà queste 100 lire, vendendo ogni kilogrammo del miscuglio ad una lira di più. Conchiudiamo, in generale che; *ecc.*

489. Probl. *In qual rapporto bisogna mescolare acqua con vino da 65 cent. il litro, per ottenere una mescolanza da 45 cent.?*

Risol. Un litro della mescolanza deve costare 45 centesimi; questi sono dovuti naturalmente al vino che essa contiene. Ora poichè un litro del vino che si adopera costa 65 cent., $\frac{1}{65}$ di litro costerà 1 cent., e saranno $\frac{45}{65}$ di litro, che costeranno 45 cent.

Un litro del miscuglio deve adunque essere composto di $\frac{45}{65}$ di vino e $\frac{20}{65}$ di acqua.

490. Probl. *In qual rapporto bisogna mescolare del vino da 80 cent. il litro con vino da 50 cent., per ottenere del vino da 62 cent.?*

Risol. Imaginiamo che i prezzi unitari di ambedue le specie del vino subiscano un medesimo rinvilio. Sappiamo [488] che il prezzo unitario di un miscuglio qualunque delle due specie di vino subisce allora l'identico deprezzamento. Supponiamo che il prezzo della seconda specie di vino si riduca a *zero*, e che il prezzo dell'altra qualità diminuisca egualmente di 50 cent., si riduca dunque a 30 cent. Il prezzo unitario del miscuglio discenderà a 12 cent. Così il problema è condotto al caso antecedente, nel quale una delle due sostanze non ha nessun valore.

La questione è dunque di determinare in quale rapporto bisogna mescolare del vino da 30 cent. con vino da 0 cent. (acqua), per ottenere una mescolanza da 12 cent. Ragionando come per il caso precedente, si conchiude che un litro della mescolanza deve esser composto di $\frac{12}{30}$ di vino da 30 cent., ed i rimanenti $\frac{18}{30}$ devono esser dell'altra specie di niun valore.

Così abbiamo trovato che, supposta divisa la mescolanza, che si vuol fare, in 30 parti eguali, 12 di queste devono essere di vino da 80 cent., e le altre 18 parti devono essere di vino da 50 cent.

INDICE